Math. L.
224 k.

R

Geometrische Anschauungslehre.

Eine Vorbereitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie.

Von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königl. Baier. Hofrathe, Director des K. Lyceums und der K. Gymnasialanstalt zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Lyceum, erstem Professor an dem K. Forstlehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde und der Kaiserlich-Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn.

Mit sieben Steintafeln.

Dritte, verbesserte und vermehrte, Auflage.

Mainz, 1823.
Bey Florian Kupferberg.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Seiner Hochwohlgeboren,

dem

Königlich-Baierischen Herrn Ober-Consistorial- und Ober-Studien-Rathe

Friedrich Emanuel Niethammer,

wirklichem Mitgliede der Königlichen Academie der Wissenschaften rc.

zum

Beweise seiner ausgezeichneten Verehrung

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorbericht zur ersten Auflage.

Daß die Geometrie, als Bildungsmittel des jugendlichen Geistes, in der Reihe wissenschaftlicher Erkenntnisse eine vorzügliche Stelle verdient, ist schon längst von aufgeklärten Pädagogen und gründlichen Mathematikern entschieden. Für das eigentliche Knabenalter, von acht bis etwa vierzehn Jahren, gibt es aber (der Regel nach) noch keine Geometrie als strenge Wissenschaft. Soll also der Knabe zum gründlichen Geometer (nicht blos zum practischen Feldmesser) gebildet werden, so muß man ihn in diesem Alter zum ernsten Studium derselben gehörig vorbereiten.

Da nun die Geometrie auf Anschauungen im Raume (d. h. auf Linien, Flächen und Körpern) beruht, das Anschauungsvermögen aber schon frühe in dem Menschen, durch Eindrücke von aussen, erwacht und zur Thätigkeit angeregt wird, so muß das wirksamste Vorbereitungsmittel zur Geometrie in der Ausbildung dieses Anschauungsvermögens bestehen.

In neuern Zeiten ist diese Wahrheit von sachkundigen Männern anerkannt worden, und es erschienen mancherley Versuche, das Studium der Geometrie gründlich vorzubereiten. Ohne ihren Verfassern zu nahe zu treten, bemerke

ich nur, daß in der nachfolgenden Schrift mein eigener Plan durchgeführt worden ist.

Jedem Lehrer, welchem die feste Begründung und Verbreitung seiner Berufswissenschaften am Herzen liegt, muß es erlaubt seyn, seine eigenthümliche Ansichten ihres Lehrvortrags der Prüfung sachkundiger Männer vorzulegen; zumal wenn solche, gleich den gegenwärtigen, nicht als blos theoretische Speculation ausgedacht; sondern aus einem mehr als fünfzehnjährigen öffentlichen Unterrichte, als practische Resultate entsprungen sind.

Leider mußte ich bey meinen öffentlichen Vorträgen der Geometrie, für Jünglinge und junge Männer von 15 bis 24 Jahren, oft die Erfahrung machen, daß es den Meisten schwerer gefallen ist, sich in die geometrischen Anschauungen mit Fertigkeit und Gewandtheit zu finden, als selbst eine Reihe geometrischer Schlüsse mit Ueberzeugung zu durchdenken. Ich suchte durch eine erweiterte Einleitung und durch mehrfaches Wiederholen der nöthigsten Elementar-Anschauungen von W i n k e l, D r e y e c k u. s. f. den Mangel zu ersetzen, was denn auch sehr Vieles verbessert und das gründliche Fortschreiten erleichtert hat. Allein Manche blieben dennoch zurücke; nicht immer, weil es ihnen an nöthigem Talente und Fleiße gebrach, sondern weil das Anschauungsvermögen in dem Jünglings- und Mannesalter nicht mehr jenen Grad von leichter Empfänglichkeit besitzt, als in dem lebendigern Alter des Knaben.

Daher wünsche ich, zum Besten der Wissenschaft und der Bildung des jugendlichen Geistes, diese Methode allgemein verbreitet zu sehen, und dieser lebhafte Wunsch bestimmte mich, die Schrift dem sachkundigen, pädagogischen Publicum zu übergeben, mit der bescheidenen Bitte,

ihre etwaige Mängel und Gebrechen, zur Beförderung ihrer Nützlichkeit, eher liebevoll zu verbessern, als absprechend zu rügen. Jedes Menschenwerk ist, mehr oder minder, Stückwerk und dem Ideale sich möglichst anzunähern, das schönste Ziel menschlicher Bemühungen. Wie schwer es ist, zweckmäßige Elementarwerke zu liefern, fühlten von jeher auch die Meister in den Wissenschaften, und es gelingt oft eher für Eingeweihtere, als für die ersten Anfänger, etwas recht Tüchtiges und Brauchbares zu liefern.

Den Vorstehern und Lehrern öffentlicher Schulen wird es leicht seyn, nach dem daselbst eingeführten Lehrplane, die Zeit zu bestimmen, wann diese geometrische Anschauungslehre eingeschalten werden muß.

Den Einwurf, daß diese geometrische Anschauungslehre zum Mechanismus führe und den Geist erdrücke, fürchte ich nicht von Sachverständigen. Wer mit meinen übrigen Schriften bekannt ist, weiß, daß ich die Gründlichkeit, diesen Grundcharacter mathematischer Wissenschaften, über Alles achte. Wer diesem etwas im Vortrage vergibt, mißkennt den Geist der Mathesis. Allein das Bestreben, mit dieser Gründlichkeit den höchsten Grad von Faßlichkeit zu verbinden, bleibt die strenge Pflicht des Schriftstellers, der für Anfänger schreibt. Wer sich den Geist der hier entwickelten Lehrmethode aneignet, wird sich überzeugen, daß es dabey nicht auf ein gedankenloses Spielen mit Linien und Flächen angelegt ist, welches das Reingeistige zum blinden Mechanismus herabwürdiget, und die Geometrie ihres edelsten Vorzugs beraubt. Der Zögling soll vielmehr eine Gewandtheit erhalten, solche Anschauungen im Raume mit Schnelligkeit, Leichtigkeit und Sicherheit zu übersehen, welche das Material zur geometrischen Wissenschaft liefern, und das strenge Studium derselben befördern.

ich nur, daß in der nachfolgenden Schrift mein eigener Plan durchgeführt worden ist.

Jedem Lehrer, welchem die feste Begründung und Verbreitung seiner Berufswissenschaften am Herzen liegt, muß es erlaubt seyn, seine eigenthümliche Ansichten ihres Lehrvortrags der Prüfung sachkundiger Männer vorzulegen; zumal wenn solche, gleich den gegenwärtigen, nicht als blos theoretische Speculation ausgedacht; sondern aus einem mehr als fünfzehnjährigen öffentlichen Unterrichte, als practische Resultate entsprungen sind.

Leider mußte ich bey meinen öffentlichen Vorträgen der Geometrie, für Jünglinge und junge Männer von 15 bis 24 Jahren, oft die Erfahrung machen, daß es den Meisten schwerer gefallen ist, sich in die geometrischen Anschauungen mit Fertigkeit und Gewandtheit zu finden, als selbst eine Reihe geometrischer Schlüsse mit Ueberzeugung zu durchdenken. Ich suchte durch eine erweiterte Einleitung und durch mehrfaches Wiederholen der nöthigsten Elementar-Anschauungen von Winkel, Dreyeck u. s. f. den Mangel zu ersetzen, was denn auch sehr Vieles verbessert und das gründliche Fortschreiten erleichtert hat. Allein Manche blieben dennoch zurücke; nicht immer, weil es ihnen an nöthigem Talente und Fleise gebrach, sondern weil das Anschauungsvermögen in dem Jünglings- und Mannesalter nicht mehr jenen Grad von leichter Empfänglichkeit besitzt, als in dem lebendigern Alter des Knaben.

Daher wünsche ich, zum Besten der Wissenschaft und der Bildung des jugendlichen Geistes, diese Methode allgemein verbreitet zu sehen, und dieser lebhafte Wunsch bestimmte mich, die Schrift dem sachkundigen, pädagogischen Publicum zu übergeben, mit der bescheidenen Bitte,

ihre etwaige Mängel und Gebrechen, zur Beförderung ihrer Nützlichkeit, eher liebevoll zu verbessern, als absprechend zu rügen. Jedes Menschenwerk ist, mehr oder minder, Stückwerk und dem Ideale sich möglichst anzunähern, das schönste Ziel menschlicher Bemühungen. Wie schwer es ist, zweckmäßige Elementarwerke zu liefern, fühlten von jeher auch die Meister in den Wissenschaften, und es gelingt oft eher für Eingeweihtere, als für die ersten Anfänger, etwas recht Tüchtiges und Brauchbares zu liefern.

Den Vorstehern und Lehrern öffentlicher Schulen wird es leicht seyn, nach dem daselbst eingeführten Lehrplane, die Zeit zu bestimmen, wann diese geometrische Anschauungslehre eingeschalten werden muß.

Den Einwurf, daß diese geometrische Anschauungslehre zum Mechanismus führe und den Geist erdrücke, fürchte ich nicht von Sachverständigen. Wer mit meinen übrigen Schriften bekannt ist, weiß, daß ich die Gründlichkeit, diesen Grundcharacter mathematischer Wissenschaften, über Alles achte. Wer diesem etwas im Vortrage vergibt, mißkennt den Geist der Mathesis. Allein das Bestreben, mit dieser Gründlichkeit den höchsten Grad von Faßlichkeit zu verbinden, bleibt die strenge Pflicht des Schriftstellers, der für Anfänger schreibt. Wer sich den Geist der hier entwickelten Lehrmethode aneignet, wird sich überzeugen, daß es dabey nicht auf ein gedankenloses Spielen mit Linien und Flächen angelegt ist, welches das Reingeistige zum blinden Mechanismus herabwürdiget, und die Geometrie ihres edelsten Vorzugs beraubt. Der Zögling soll vielmehr eine Gewandtheit erhalten, solche Anschauungen im Raume mit Schnelligkeit, Leichtigkeit und Sicherheit zu übersehen, welche das Material zur geometrischen Wissenschaft liefern, und das strenge Studium derselben befördern.

Auch ist diese Anschauungslehre an sich selbst ein sehr kräftiges Bildungsmittel des jugendlichen Geistes, der hier auf eine naturgemäße Weise in Thätigkeit gesetzt und erhalten wird. Daher sollte sie auch in Volks- und Bürger-Schulen mit Ernst und Eifer getrieben werden. Soll aber die geometrische Vorbereitungslehre hier diese wichtige Vortheile gewähren, so muß der Lehrer mit ihrem Geiste innig vertraut seyn. Lebendigkeit des Vortrags, Erweckung der jugendlichen Theilnahme, und Vermeidung alles Pedantischen in Rede und Gebährde, müssen ihn kräftig unterstützen. Dann wird der leicht bewegliche Geist der Knaben wunderbar ergriffen, und ihre rasche Fortschritte sind der süßeste Lohn des mühevollen Lehramtes. Wem es Ernst mit dem Lehren ist, der wird sich diese Methode leicht aneignen, und sie durch das Lehren selbst noch vollends erlernen.

Um dem Lehrer die nöthige Anleitung zu seinem Vortrage zu geben, ist der erste Cursus dieser Anschauungslehre dialogisch bearbeitet. Die übrigen Cursus sodann auf gleiche Weise durchzuführen, kann dem verständigen Lehrer nicht schwer fallen. Auch ist das Ganze so eingerichtet, daß die Schrift nicht blos dem Lehrer zum Leitfaden seines Unterrichtes, sondern auch dem Schüler sehr bequem zur Nachlese und Privatübung dient. Daher geht dem ersten Cursus die kurze Uebersicht voran, damit der Schüler, mit Hülfe der Tafeln, die Hauptsache für sich selbst wiederholen kann. Auf solche Weise muß sich das Buch, um recht nützlich zu seyn, sowohl in den Händen des Lehrers, als auch der Schüler befinden.

Die Einrichtung der sieben Tafeln ist so getroffen, daß sie, wie sonst gewöhnlich, an das Buch geheftet und beym Lesen ganz herausgeschlagen werden können. Die Zwischenräume bestimmen die Stellen, wo dieselbe bey dem Heraus-

und Hineinschlagen gebrochen werden müssen. Auch kann man je zwey zusammengehörige besonders auf dünne Pappe aufziehen lassen und diese 42 Täfelchen in einem kleinen Futterale aufbewahren. Dieses ist besonders für die Schüler und bey dem Privatunterrichte zu empfehlen, damit man hier durch Umdrehung dieser Täfelchen den Zeichnungen mancherley Lage geben kann.

Für den öffentlichen Unterricht in den Volks- und Bürgerschulen muß die schwarze Schultafel so vorgerichtet seyn, daß sie mit Leichtigkeit um ihre Mitte ganz und gar herumgedreht werden kann. Die etwa 5 Fuß lange und 3 Fuß breite Tafel bekömmt auf der Mitte ihrer Rückseite einen senkrecht stehenden ungefähr 4 Zoll langen, 1 Zoll dicken runden Zapfen von festem Holze, welcher in die etwas weitere Oeffnung des Gestelles der Tafel eingeschoben werden kann. Hierdurch ist die Schultafel um ihren Mittelpunct drehbar, und wird, da das dreyfüßige Gestelle immer etwas schief geneigt ist, in jeder Lage mit der nöthigen Festigkeit ruhen. Ein Anschlag-Lineal und ein kleineres gewöhnliches Lineal, nebst einem schwarzgebeizten hölzernen Zeiger mit weißer Spitze, einem Schwamme und guter Kreide, sind ebenfalls nöthige Geräthschaften für den Schulunterricht. Zum Privatunterrichte bedient man sich der kleinen Anschauungs-Täfelchen und einer Schiefertafel, um den Zeichnungen noch mehr Mannigfaltigkeit zu geben.

Aschaffenburg, im Februar 1815.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Vorbericht zur dritten Auflage.

Daß sich die zweyte Auflage dieser Schrift binnen vier Jahren vergriffen hat, ist mir erfreulich. Ich finde darin einen Beweis für die Zweckmäßigkeit meiner Lehrmethode, und durch ihn die schönste Belohnung der auf ihre Ausarbeitung verwendeten Zeit und Mühe. Von dem vielfachen Nutzen, welcher aus einer naturgemäßen, in gebührenden Grenzen gehaltenen Bildung des Anschauungs-Vermögens hervorgeht, durch frühere Selbsterfahrung überzeugt, freut es mich doppelt, daß so viele würdige Schulvorstände und öffentliche Lehrer diese Ueberzeugung mit mir theilen, und ich fühle mich verpflichtet, Denselben hierdurch meinen öffentlichen Dank für die Einführuug dieses Werkchens in ihren Schulen zu erstatten.

Bey Veranstaltung dieser dritten Auflage habe ich die Schrift einer sorgfältigen Revision unterworfen, und Sachkundige, welche dieselbe mit der zweyten Ausgabe vergleichen wollen, werden finden, daß sie eine verbesserte und vermehrte genennt werden darf. Damit dieselbe für höhere Lehranstalten um so brauchbarer werde, ist die dialogische Ausführung des ersten Cursus hinweggelassen; anstatt deren aber das Wesentliche dieses Cursus gehörig dargestellt worden. Auch wurde der Inhalt jeder einzelnen Tafel der sämmtlichen drey Cursus in einer kurzen Ueberschrift, zum Vortheile des Lehrers und Schülers, zusammengefaßt. Ausserdem sind mehrere Zusätze beygefügt und einige Fehler der Tafeln verbessert worden.

Da diese geometrische Anschauungslehre, nach Verschiedenheit des Alters und Berufs der Zöglinge, auf mannigfaltige Weise zur Geistesbildung angewendet werden kann, so scheint mir hier um so mehr eine schickliche Stelle zu seyn, diesen Gegenstand zu berühren, als dadurch auch mehreren desfalls an mich ergangenen Anfragen Genüge geleistet wird.

Man kann das Verhältniß der Schrift zu den Volksschulen, zu den Gymnasien, zu den Lyceen und Universitäten, zu den Normalschulen, zu den Kunstschulen und zu dem Privatunterrichte betrachten. Jedes dieser Verhältnisse soll kürzlich erwogen werden.

I. Verhältniß zu den Volksschulen.

Die Elemente einer tüchtigen Volksbildung sind: Wekkung und Ausbildung des religiösen und moralischen Gefühls, Uebung der Verstandeskraft, und Sorge für Gesundheit, Stärke und Gewandtheit des Körpers. Das Zweyte wird bey den Kleinen am Kräftigsten durch Sprachbildung und durch die geometrische Anschauungslehre erreicht. Wie überhaupt in dem Menschen das Sinnliche zuerst erwacht und sich allmählich zum Geistigen fortbildet, so bringt auch diese Lehre eine Fülle von räumlichen Anschauungen zur Betrachtung, entwickelt dieselbe, und sucht sie sodann in scharfe Begriffe zu fassen. Anschauungs-Vermögen, Sprachkraft, Verstand werden hierdurch gebildet. Diese Bildung aber thut Jedem Noth, er mag sich in spätern Jahren dem Ackerbau oder den Handwerken, den Künsten oder den Wissenschaften widmen. So wird die Anschauungslehre höchst wichtig für ächte Volksbildung, welche selbst wiederum von größter Bedeutung für die innere Kraft der Staaten ist. Daher soll in jeder Landschule diese geiststärkende Lehre ernstlich geübt werden. Im Laufe von zwey Jahren kann sie, bey vier Wochenstunden, vollkom-

men durchgeführt und gehörig wiederholt seyn. Der Lehrer muß das Buch besitzen, und sich durch Privatstudium mit dessen Geist und Methode vertraut machen, was Jedem, der zum Lehramte überhaupt Beruf fühlt, sehr leicht werden wird. Die Schulkinder brauchen die Schrift nicht zu haben; Bemittelte mögen sich solche wohl anschaffen. Aber der Lehrer lasse jeden Schüler auf sein kleines Schiefertäfelchen alle Zeichnungen nachbilden, die er an der Schultafel zur allgemeinen Anschauung bringt. Dieses bildet den Geist, übt den Blick und die Hand, schärft das Augenmaas, und ist eine wirksame Vorübung zur freyen Handzeichnenkunst. Da sich in den Landschulen Kinder von höchst verschiedener Anlage versammeln, so muß der Lehrer auf das Bedürfniß der ganzen Schule sehen, und nur allmählich, aber sicher, in dem Unterrichte fortschreiten. Daher sind ihm häufige Wiederholungen sehr zu empfehlen. Beherzigt er diese Winke, so wird er in der Lust, womit die Kleinen an der Lehre Theil nehmen, und in ihren raschen Fortschritten reichhaltigen Lohn für seine Bemühung finden. Um den Lehrern die nöthige Anleitung zu diesem Unterrichte zu geben, ist der erste Cursus dieser geometrischen Anschauungslehre dialogisch bearbeitet und der Schrift als Zugabe beygefügt worden. Da derselbe bey dieser dritten Auflage keinen wesentlichen Bestandtheil des Werkchens bildet, so kann ihn der Eigenthümer auch besonders einbinden lassen.

II. Verhältniß zu den Gymnasien.

Religionsunterricht, Sprachstudium und Mathematik sind die Grundpfeiler einer ächten Gymnasialbildung. Besonders erkennt man wieder in unsern Tagen den wichtigen Einfluß der Mathesis auf Entwickelung und Erhöhung der Verstandeskraft. Aber nicht durch jede Lehrmethode wird dieser wichtige Zweck erreicht. Nur der wissenschaftlich-

mathematische Vortrag stärkt und erhebt den Geist, der mechanische schwächt und unterdrückt ihn. Vorzüglich tritt die Geometrie als kräftige Geistesgymnastik hervor. Sie vereiniget erfreuliche Klarheit mit strenger Gewißheit. Aber sie muß ein sicheres Fundament haben, worauf sie ruhet und mit Leichtigkeit aufgeführt werden kann. Dies ist die geometrische Anschauungslehre, die es sich zur Aufgabe macht, zwischen den ins Unendliche gehenden Combinationen räumlicher Objecte, und zwischen ihrer allzubeschränkten Darstellung ein zweckmäßiges Mittel zu halten. Ihr Vortrag findet daher an jedem Gymnasium, als Einleitung zum Studium der Geometrie, eine schickliche Stelle. Da diese Schüler in der freyen Geistesbildung einige Fortschritte gemacht haben, so muß der Vortrag der Anschaungslehre diesem Standpuncte entsprechen. Der Lehrer bringt alle Anschauungen des ersten Cursus nach und nach auf die Schultafel, benennt sie, und läßt solche von einzelnen Schülern wiederholen. Da hierdurch Jeder der Frage gewärtig seyn muß, so bleiben alle Schüler in gespannter Aufmerksamkeit. Dieser examinatorische Vortrag muß sich durch sämmtliche Cursus erstrecken, und wird der Lehre selbst Lebendigkeit und Theilnahme gewähren. Vorzüglich sehe der Lehrer auf Sprachrichtigkeit der Antworten seiner Schüler; besonders in dem dritten und vierten Cursus, welche den Verstand mehr, als die Anschauungskraft in Anspruch nehmen. Zweckmäßig ist es, wenn jeder Schüler die auf der Schultafel dargestellten Zeichnungen entweder in einem besonderen Hefte oder auf einer Schiefertafel selbst nachbildet. Auch sollen Alle das Lehrbuch besitzen, weil das Nachlesen des Vorgetragenen durchaus erfoderlich ist. Hat nun der Lehrer das nöthige Lehrtalent (ohne welches kein Unterricht gedeiht), so wird er mit Freude die Fortschritte seiner Schüler erblicken, und

diesen geometrischen Vorübungen sodann die eigentliche Geometrie folgen lassen. Mit Rücksicht auf das, was die Geometrie seyn und leisten soll, hat der Verfasser der Anschauungslehre ein solches Lehrbuch (Geometrische Wissenschaftslehre. Eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie. Mit sechs Steintafeln. Zweyte Auflage. Mainz, bey Florian Kupferberg 1819. XXX und 234 S. 8. Ladenpreis 20 ggr. oder 1 fl. 30 kr.) herausgegeben, und in vier Cursus die reine Elementargeometrie, die rechnende Elementargeometrie, die practische Elementargeometrie und die Elementar-Trigonometrie abgehandelt. Auch diese Schrift ist bereits mehrfach in öffentlichen Schulen eingeführt.

III. Verhältniß zu den Lyceen und Universitäten.

Lyceen und Universitäten haben den wichtigen Beruf, die Keime gelehrter Bildung zur Blüthe und seegensreichen Frucht zu erziehen. Das Studium der Mathesis wird hierzu einen wirksamen Beytrag liefern, und insonderheit die Geometrie. Der Lehrplan verschiedener Lyceen ist aber sehr verschieden. Wird das gründliche Studium der Geometrie hier erst begonnen, so findet die Anwendung der geometrischen Anschauungslehre gerade so, wie bey den Gymnasien Statt. Sollen aber die geometrischen Grundlehren für solche Candidaten des Lyceums oder der Universität vorgetragen werden, welche bereits in der mathematischen Bildung etwas fortgeschritten sind, so wird die Anschauungslehre, als Einleitung zur Geometrie, von dem öffentlichen Lehrer nach dem Hauptinhalte jedes Cursus kürzlich durchgeführt, welches, bey vier Wochenlectionen, etwa eine Zeit von vier bis fünf Wochen erfodert. Auch muß solchen gebildeten Schülern, der strengen Lehrmethode wegen, diese Propädeutik

schon deshalb erfreulich seyn. Es wird sich daher weder der academische Lehrer, noch der academische Schüler dieser Anschauungslehre auf der hohen Schule zu schämen haben, sobald Jener einmal die Elementargeometrie vortragen, Dieser aber sie studieren will. Zum Leitfaden dieser Elemente mag sodann meine geometrische Wissenschaftslehre dienen, welcher das Streben nach rein geistiger Behandlung der Geometrie zum Grunde liegt, ohne das practische Bedürfniß gänzlich davon auszuschließen.

IV. Verhältniß zu den Normalschulen.

In den Normalschulen sollen tüchtige Volksschullehrer gebildet werden. Soll aber der Lehrer diesem wichtigen Zwecke entsprechen, so muß er die nöthige Sachkenntniß mit einer guten Lehrmethode vereinigen. Letzteres ist so unentbehrlich, als Ersteres. Was nützt des Lehrers eigenes Wissen, wenn er nicht die Gabe besitzt, dem jugendlichen Geiste Theilnahme einzuflößen, ihn kräftig zu wecken, und sicher zu leiten? Sein Geist muß die Schüler durchdringen, um Aehnliches in ihnen hervorzurufen. Wie vermag dies ein Lehrer, der die Individualität des Schülers verkennt? Dieser individuellen Anlage, mit steter Hinsicht auf die Natur des Lehrgegenstandes folgen, heißt mit Zweckmäßigkeit lehren. Hierzu ist den Normalschülern die geometrische Anschauungslehre vorzüglich wichtig. Hier lernen sie das Wesen und die Grundzüge einer strengen, vom Einfachen allmählich zum Zusammengesetzten fortschreitenden, und durchaus im leicht faßlichen Kreise des Anschaulichen sich bewegenden Methode kennen; sie erhalten (in dem dialogisch bearbeiteten ersten Cursus) Anleitung zu den so höchst nöthigen catechetischen Uebungen, und wenn sich mit dieser theoretischen Bildung später noch die practische Fertigkeit verbindet, so ist in ihnen der Grund zu einem

tüchtigen Schulmanne gelegt, der seinem hohen Berufe immer näher rücken wird. Es bedarf kaum einer Erinnerung, daß diese Anschauungs-Uebungen sich nicht blos auf einseitige Schärfung des geometrischen Blickes beschränken, sondern daß aus ihnen der Keim zu jeder naturgemäßen Lehrmethode hervorgeht. Denn gleichwie es nur einen menschlichen Geist gibt, so folgt derselbe auch nur einem Entwickelungs- und Bildungsgesetze. Wer demnach dieses einmal erkannt und sich angeeignet hat, bleibt auf immer in dessen Besitze, um solches auf höchst manigfaltige Weise, in der Wissenschaft wie im Leben, wiederum zu benützen. Sind nun die Normalschüler durch die geometrische Anschauungslehre kräftig vorbereitet, so wird in Vielen die edle Begierde zur eigentlichen Wissenschaftslehre geweckt, und sie dadurch ermuntert werden, das Gebiet der Geometrie mit Nutzen zu betreten.

V. Verhältniß zu den Kunstschulen.

Alle Raumkünste, z. B. Zeichnenkunst, Malerey, die bildenden Künste, beruhen auf Linien, Flächen, Körpern, und ihren verschiedenen Combinationen. Nur mit einem gebildeten Anschauungsvermögen wird der Künstler in seinem Fache leichte und sichere Fortschritte machen. So erscheint also die geometrische Anschauungslehre, besonders wenn sie mit practischen Uebungen der Schüler verbunden wird, als sehr nützliche Propädeutik zur Zeichnenkunst und Malerey. Die Perspective, die Zeichnung der Grundrisse und Aufrisse steht ohnedies in engster Verbindung mit ihr. Körperliche Raumkünste (die plastischen) erfodern natürlich auch eine körperliche Anschauungslehre *) zur Vorbereitung. Mit Recht sagt Hr. Hofrath

*) Für Freunde des geometrischen Studiums bemerke ich hier, daß zur Vollendung des Systems der Elementargeometrie eine

Ladomus (in seiner zur höhern Bildung der Verstandes- und Anschauungskraft vorzüglich zu empfehlenden, trefflichen Lehre von den Kegelschnitten S. XXIII.) « vis technica aller technischen Künste ist und bleibt einmal die Mathematik, und wie das Gerippe so zu sagen der Träger von der Schönheit des menschlichen Körpers, so ist und bleibt die Mathematik die Grundlage für die Raumkünste. » Auf welche Weise die Anschauungslehre diesen technischen Künsten zur Hülfslehre dienen kann, muß aus der Anlage und Bildung, so wie auch nach dem Zwecke des Schülers, ermessen werden.

VI. Verhältniß zu dem Privatunterrichte.

Die Anwendung der geometrischen Anschauungslehre bey dem Privatunterrichte geht aus dem verschiedenen Zwecke hervor, welchen man durch diesen Unterricht zu erreichen strebt. Bey Knaben, welche, ohne sich dem gelehrten Stande zu widmen, eine blos allgemeine Bildung genießen sollen, folgt sie dem Lehrplane für den Volksunterricht. Will sich der Zögling zum Künstler bilden, so dient ihm die Anschauungslehre als theoretisch-practisches Hülfsmittel zur Leitung und Anwendung seines Talentes. Bey Knaben, welche sich späterhin dem Studium ernster Wissenschaften widmen, muß die Lehrmethode jener an Gymnasien folgen. Jünglinge und Männer genießen diesen Unterricht nach ähnlichen Abstufungen; nur mit dem Unterschiede, daß der Lehrer auf den höhern Bildungsgrad dieser reifern Schüler verständige Rücksicht zu nehmen hat. Doch darf nichts, so elementar und allbekannt es auch scheinen mögte, über-

---

Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre, als Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Stereometrie bey Herrn Kupferberg in Mainz im Jahre 1820 erschienen ist.

gangen, sondern Alles muß, nur in größerer Kürze, durchgeführt werden. Diese Lückenlosigkeit ist wesentliches Erfoderniß des systematischen Vortrags und nur durch ununterbrochenes gründliches Fortschreiten kann der Geist des Schülers, er sey Kind, Knabe oder Mann, kräftig gebildet werden. Bey diesem Privatunterrichte tritt noch der Vortheil ein, daß die Anschauungsobjecte auf eine kleine Schiefertafel gezeichnet, leicht in jede veränderte Lage gebracht und von dem Schüler bequem nachgebildet werden können.

Möchte doch der wichtige Zweck, welcher durch Benüzzung der geometrischen Anschauungslehre so sicher erreicht werden kann, die öffentlichen und Privatlehrer zur Anwendung dieser erprobten Lehrmethode ermuntern, damit bey dem Unterrichte der blinde Mechanismus erdrückt, die freye Thätigkeit des Geistes aber immer allgemeiner und herrschender werde!

Aschaffenburg, im November 1822.

Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Einleitung.

Der Gegenstand der Geometrie ist der Raum. Sowohl er selbst, als die in ihm zu unterscheidenden drey Elementar-Objecte: Linien, Flächen und Körper sind uns nur durch die Anschauung gegeben und nicht in Begriffen erkennbar. Daher ist der Ursprung der Geometrie in dem Anschauungsvermögen, und nicht in dem Verstande zu suchen. Die Anschauungen sind als das Material zu betrachten, an welchem sich der Verstand sodann erst thätig zeigt. Die Geometrie auf blose Begriffe bauen wollen, ist widersprechend, so wie es hinwiederum unmöglich ist, aus blosen Anschauungen ein geometrisches Lehrgebäude zu errichten. Soll also der Vortrag der Geometrie naturgemäß seyn, so muß er mit den Anschauungen beginnen, dieselbe von den einfachsten Elementen zum Zusammengesetztern stufenmäßig aufklären; und sodann erst auf diesem fruchtbaren

Felde die strenge Wissenschaft erbauen. Daß die Geometrie, auch da wo sie nach der seitherigen Methode gut gelehrt wird, nicht immer jene Früchte bringt, die man von ihr erwarten darf, und daß die Schüler öfters nur sehr unbedeutende Fortschritte darin machen, ist eine traurige Folge der beynahe gänzlich vernachläßigten Ausbildung des Anschauungsvermögens der Zöglinge. Wie allzudürftig erscheinen nicht in dieser Rücksicht die Einleitungen, welche in den gewöhnlichen Compendien der Geometrie der eigentlichen Wissenschaft vorangehen. Man begnüget sich meist mit Erklärungen der Hauptelementarbegriffe in einer Kürze, welche das Gepräge der Unvollständigkeit allzudeutlich an sich trägt. Auf eine so magere Grundlage kann durchaus keine vielseitige Wissenschaft gegründet werden. Betritt hingegen der Schüler mit geschärftem, ausgebildeten Anschauungsvermögen das Gebiet der geometrischen Lehren, so müssen seine Fortschritte sicher und schnell seyn. Denn die Schlüsse des Geometers sind einfach und klar, und können Keinem, der ihnen folgen will, Schwierigkeit verursachen. Der Vorzug der Geometrie vor vielen andern Disciplinen besteht nicht allein in ihrer Gewißheit, sondern in der

ihr eigenthümlichen Evidenz. Jene beruht auf der richtigen Anwendung logischer Regeln auf geometrische Objecte; allein ihre Evidenz geht nur aus der ungemeinen Klarheit hervor, womit wir diese Elementargegenstände der Geometrie in der Anschauung erkennen. Soll also die Geometrie in dem höchsten Glanze ihrer Eigenthümlichkeit erscheinen, so muß die Quelle, woraus jene Evidenz hersließet, nicht verstopft, sondern dem Zöglinge frühe schon und nicht spärlich eröffnet werden. Die Natur selbst ladet hiezu ein. Denn wie frühe schon entwickelt sich das Anschauungsvermögen im Menschen durch Einwirkung der ihn umgebenden Aussendinge? Wie leicht urtheilt das Kind über Verhältnisse des Größern und Kleinern an sichtbaren Objecten? Werden diese Keime, zum Nutzen der Wissenschaft und des Lebens, gehörig entfaltet, so erhält man eine Vorbereitung zur Geometrie, welche die reichlichsten Früchte bringt. Kinder von acht Jahren sind schon dieser stufenmäßigen Ausbildung des Anschauungsvermögens fähig, wie vielfache Erfahrungen gelehrt haben; und sie folgen diesem Unterricht mit Freuden, da er ihre Thätigkeit auf eine leichte und spielende Weise beschäftiget.

Der Plan einer solchen geometrischen Anschauungslehre ist in der hier folgenden Schrift durchgeführt. Der Verfasser hat sich bemühet, einem zweckmäßigen Mittelwege zu folgen. Daher vermied er sorgfältig jene endlose Combinationen räumlicher Gegenstände, welche für's Erste zu nichts Lehrreichem führen, und sodann noch die Thätigkeit des Schülers erschlaffen, anstatt dieselbe verhältnißmäßig anzuregen und zu stärken. Auch schloß er diese Uebungen nicht in allzuenge Grenzen, wodurch sie allen Werth verlohren hätten. Er nahm Alles in seinen Plan auf, was ihm zu einem gründlichen Studium der Elementargeometrie geometrisch wichtig schien; so, daß diese geometrische Anschauungslehre als Vorbereitung zu jedem guten Handbuche der Geometrie dienen soll. Auch wird sie solchen Schülern höchst nützlich seyn, welche, ohne sich in der Folge der geometrischen Wissenschaft zu widmen, ihr Anschauungsvermögen ausbilden und schärfen wollen.

Das Ganze zerfällt in vier Cursus, welche theils in unmittelbarer Verbindung, theils im Wechselverhältnisse zusammen stehen.

Der erste Cursus ist den einfachsten Anschauungen

geometrischer Gegenstände und ihrer Verbindungen, in systematischer Stufenfolge, gewidmet. Diese Anschauungen werden auf den Tafeln 1 bis 46 vor das Auge gebracht. Hier ist durchaus von keinen wissenschaftlichen Erklärungen die Rede; aber alles muß sehr aufmerksam beschaut werden. Sind einmal die Anschauungen recht klar und lebendig, so ist es leicht, sich von ihnen zu deutlichen Begriffen zu erheben.

In dem zweyten Cursus wird der Zögling zur Bezeichnung, der ihm nun bereits bekannt gewordenen Anschauungen des ersten Cursus, angeleitet. Dieses geschieht durch die Buchstaben des lateinischen Alphabeths, und es ist zur Abkürzung des geometrischen Vortrags durchaus nothwendig, sich mit diesem Gegenstande vertraut zu machen. Auf solche Weise wird der zweyte Cursus zugleich eine Wiederholung des ersten. Ausserdem werden aber hier an die bereits klar gewordenen, frühern Anschauungen wieder neue geknüpft, welche dem Zöglinge des ersten Cursus nicht faßlich genug gewesen seyn würden; nun aber mit größter Leichtigkeit aufgefaßt werden können. Durch diesen zweyten Cursus wird also das Feld der Anschauungen sowohl

erweitert, als auch dem Schüler die Fertigkeit beygebracht, diese Anschauungen sogleich mit passenden Buchstaben zu bezeichnen. Auch hier kommen keine Erklärungen vor, sondern die gesammte Kenntniß des Schülers überschreitet noch nicht den Kreis des Anschauungsvermögens. Dieser zweyte Cursus ist auf den Tafeln 47 bis 64 durchgeführt.

In dem dritten Cursus wird das Gebiet der geometrischen Elementar-Anschauungen noch gänzlich abgeschlossen, und der Schüler allmählich an scharfe Bestimmung der Begriffe gewöhnt, die nun sehr leicht auf jene Anschauungen gebaut werden können. Die Tafeln 65 bis 84 dienen zur Erläuterung dieser wichtigen Uebungen.

Den Schluß des Ganzen macht der vierte Cursus, welcher von den mathematischen Abkürzungszeichen, von den Grundsätzen und Foderungen, und endlich von dem Begriffe, den Haupttheilen und der Methode der Mathematik handelt.

Der

geometrischen Anschauungslehre

erster Cursus.

Erster Cursus.

Tafel 1.

Die Anschauung des Punctes, der geraden und der krummen Linie.

Oben. Was hier zur Anschauung gebracht wird, nennt man: Punct.

Mitten. Was man hier erblickt, heißt: gerade Linie.

Unten. Was in diesem Fache angeschaut wird, nennt man: krumme Linie.

Tafel 2.

Zwey gerade Linien; zwey krumme Linien; zwey gerade Linien und eine krumme.

Oben. Die Anschauung zweyer geraden Linien.

Mitten. Die Anschauung zweyer krummen Linien.

Unten. Die Anschauung zweyer geraden Linien und einer krummen.

Tafel 3 und 4.

Zwey ungleiche und zwey gleiche gerade Linien.

Oben. Die Anschauung zweyer ungleichen geraden Linien; einer größern und einer kleinern.

Mitten und Unten. Die Anschauung zweyer gleichen geraden Linien.

Tafel 5.

Der rechte, spitze und stumpfe Winkel. Schenkel und Scheitel des Winkels.

Oben. Die Anschauung des rechten Winkels, seiner Schenkel und seines Scheitels.

Mitten. Die Anschauung des spitzen Winkels, seiner Schenkel und seines Scheitels.

Unten. Die Anschauung des stumpfen Winkels, seiner Schenkel und seines Scheitels.

Tafel 6 und 7.

Der rechte, spitze und stumpfe Winkel mit ungleichen Schenkeln.

Oben. Der rechte Winkel mit ungleichen Schenkeln. Anschauung des größern und des kleinern Schenkels.

Mitten. Der spitze Winkel mit ungleichen Schenkeln. Anschauung des größern und des kleinern Schenkels.

Unten. Der stumpfe Winkel mit un-

gleichen Schenkeln. Anschauung des größern Schenkels und des kleinern.

Tafel 8.

Zwey gleiche und zwey ungleiche spitze Winkel.

Oben. Zwey gleiche spitze Winkel. Anschauung ihrer Oeffnungen.

Mitten. Zwey ungleiche spitze Winkel; rechts der kleinere, links der größere. Anschauung ihrer Oeffnungen.

Unten. Zwey ungleiche spitze Winkel; rechts der größere, links der kleinere. Anschauung ihrer Oeffnungen.

Tafel 9.

Der rechte Winkel mit gleichen und mit ungleichen Schenkeln.

Oben, Mitten und Unten. Anschauung des rechten Winkels mit gleichen und mit ungleichen Schenkeln. Anschauung ihrer Oeffnungen. Alle rechte Winkel haben gleiche Oeffnungen, oder die Schenkel aller rechten Winkel haben gleiche Neigung gegen einander. Die Anschauung erkennt, daß alle rechte Winkel, in Rücksicht der Größe ihrer Oeffnungen oder der gegenseitigen Neigung ihrer Schenkel, einander gleich sind.

Tafel 10.

Zwey gleiche und zwey ungleiche stumpfe Winkel.

Oben. Zwey gleiche stumpfe Winkel. Anschauung ihrer ungleichen Schenkel und ihrer Oeffnungen.

Mitten. Zwey ungleiche stumpfe Winkel. Anschauung ihrer ungleichen Schenkel und ihrer ungleichen Oeffnungen. Zur Rechten der größere, zur Linken der kleinere stumpfe Winkel.

Unten. Ebenfalls zwey ungleiche stumpfe Winkel; oben der größere, unten der kleinere.

Tafel 11.

Der stumpfe Winkel ist größer, als der rechte und der rechte Winkel ist größer, als der spitze Winkel.

Oben. Rechts ein spitzer, links ein rechter Winkel; Anschauung ihrer Oeffnungen. Die Oeffnung des spitzen Winkels ist kleiner, als die Oeffnung des rechten Winkels. Der spitze Winkel ist darum kleiner, als der rechte und der rechte Winkel ist größer, als der spitze Winkel.

Mitten. Rechts ein stumpfer, links ein rechter Winkel. Anschauung ihrer Oeffnungen. Die Oeffnung des stumpfen Winkels ist größer, als die Oeffnung des rechten Winkels. Der stumpfe Winkel ist größer, als der rechte und der rechte Winkel ist kleiner, als der stumpfe Winkel.

Unten. Rechts ein stumpfer, links ein spitzer Winkel. Anschauung ihrer Oeffnungen. Der stumpfe Winkel ist größer, als der spitze, und der spitze Winkel ist kleiner, als der stumpfe.

Tafel 12.

Die größe eines Winkels hängt nicht von der Größe seiner Schenkel, sondern von der Größe seiner Oeffnung ab.

Oben. Rechts ein stumpfer, links ein spitzer Winkel. Der größere Winkel hat hier kleinere Schenkel, der kleinere Winkel hat größere Schenkel.

Mitten. Oben ein stumpfer und unten ein spitzer Winkel. Der größere Winkel hat wieder kleinere, der kleinere Winkel aber größere Schenkel.

Unten. Oben ein rechter Winkel mit größern Schenkeln, unten ein stumpfer Winkel mit kleinern Schenkeln. Aus diesen Anschauungen erkennt man, daß die Größe eines Winkels nicht in der Größe seiner Schenkel, sondern in der Größe seiner Oeffnung besteht. Wenn daher, bey einerley Oeffnung des Winkels, seine Schenkel größer oder kleiner werden, so bleibt die Größe dieses Winkels unverändert. — Wie sich aber die Größe eines Winkels durch Veränderung seiner Oeffnung verändert, kann durch zwey lange und schmale Holzstäbchen, welche an ihrem einen Ende charnierartig verbunden sind, den Anfängern sehr klar gemacht werden.

Tafel 13.

Nebenwinkel von einem spitzen und einem stumpfen Winkel, und von zwey rechten Winkeln gebildet.

Oben. Die zwey Winkel, welche man hier erblickt, heißen Nebenwinkel. Der spitze Winkel steht zur Rechten, der stumpfe zur Linken. Anschauung ihres gemeinschaftlichen Scheitels und ihres gemeinschaftlichen Schenkels.

Mitten. Ebenfalls zwey Nebenwinkel; rechts der stumpfe (größere) links der spitze (kleinere). Sowohl hier, als oben befinden sich ungleiche Nebenwinkel.

Unten. Zwey Nebenwinkel, deren jeder ein rechter ist. Dies gibt die Anschauung der gleichen Nebenwinkel.

Tafel 14.

Scheitelwinkel als spitze und stumpfe Winkel, und als vier rechte Winkel.

Oben. Hier erblickt man zwey Paare von Scheitelwinkeln (rechts oben und links unten) und ein Paar stumpfe Scheitelwinkel (links oben und rechts unten). Jene zwey spitze und diese zwey stumpfe Winkel sind einander gleich. Diese zwey Paare von Scheitelwinkeln bilden vier Paare von Nebenwinkeln, welche die Anschauung leicht darstellt.

Mitten. Ebenfalls zwey Paare von Scheitelwinkeln, nur mit veränderter Lage der spitzen

und stumpfen Winkel. Anschauung ihres gemeinschaftlichen Scheitels.

Unten. Anschauung von Scheitelwinkeln, welche alle rechte Winkel sind.

Tafel 15.

Zwey gegeneinanderlaufende, auseinanderlaufende und gleichlaufende Linien.

Oben. Zwey gegeneinanderlaufende Linien (nach der Rechten) und auseinanderlaufende (nach der Linken.)

Mitten. Die nämlichen Linien, nur mit verwechselter Lage. Die Anschauung lehrt unmittelbar, daß gerade Linien, welche nach der Rechten gegeneinanderlaufende sind, nach der Linken auseinanderlaufen, und umgekehrt.

Unten. Zwey gleichlaufende Linien. Die Anschauung lehrt, daß zwey gerade Linien, welche zur Rechten gleichlaufend sind, auch zur Linken gleichlaufen, und umgekehrt.

Tafel 16.

Drey gleiche und drey ungleiche gerade Linien.

Oben. Drey gleiche gerade Linien.

Mitten. Zwey gleiche gerade Linien oben; eine ungleiche (kleinere) unten.

Unten. Oben und unten zwey gleiche gerade Linien; eine ungleiche (kleinere) mitten.

Tafel 17, 18, 19 u. 20.

Drey gerade, theils gleiche, theils ungleiche Linien in verschiedenen Lagen.

Oben, Mitten und Unten. Zwey gleiche gerade Linien und eine ungleiche gerade Linie in verschiedenen Lagen. Eben so auch drey gleiche gerade Linien.

Tafel 21.

Drey gleiche gerade Linien, auch zwey gleiche und eine ungleiche, zu zwey stumpfen Winkeln verbunden.

Oben. Drey gleiche gerade Linien in Verbindung zu zwey gleichen stumpfen Winkeln. Bemerkung des gemeinschaftlichen Schenkels.

Mitten. Zwey gleiche gerade Linien mit einer ungleichen (kleinern) zu zwey gleichen stumpfen Winkeln verbunden. Anschauung des gemeinschaftlichen Schenkels.

Unten. Eine ähnliche Verbindung zweyer gleichen geraden Linien mit einer ungleichen zu zwey ungleichen stumpfen Winkeln.

Tafel 22.

Drey, theils gleiche, theils ungleiche gerade Linien bilden zwey, theils stumpfe, theils spitze Winkel.

Oben. Drey gleiche gerade Linien bilden zwey ungleiche stumpfe Winkel.

Mitten. Zwey gleiche gerade Linien und eine kleinere bilden einen spitzen und einen stumpfen Winkel.

Unten. Zwey gleiche gerade Linien und eine kleinere bilden zwey spitze Winkel.

Tafel 23.

Aehnliche Verbindungen dieser Linien zur Bildung rechter, spitzer und stumpfer Winkel.

Oben, Mitten, Unten erblickt man ähnliche Verbindungen von zwey gleichen geraden Linien mit einer ungleichen, aber größern; wodurch theils rechte, theils spitze und stumpfe Winkel entstehen.

Tafel 24.

Drey ungleiche gerade Linien.

Oben, Mitten und Unten. Drey ungleiche gerade Linien, wovon eine die größte, eine die mittlere und eine die kleinste ist. Die Lage einer jeden läßt sich (nach oben, mitten und unten) leicht bestimmen.

Tafel 25, 26 und 27.

Drey ungleiche gerade Linien in verschiedenen Lagen.

Oben, Mitten und Unten zeiget drey ungleiche gerade Linien in verschiedenen Lagen, welche jedesmal (nach rechts, links und mitten) leicht zu bestimmen sind.

Tafel 28, 29, 30 und 31.

Drey ungleiche gerade Linien in verschiedenen Winkelverbindungen.

Oben, Mitten und Unten enthält drey

ungleiche gerade Linien in verschiedenen Winkelverbindungen. Man kann sowohl diese Winkel, als die Schenkel, welche sie bilden, nach ihrer Größe und Lage leicht benennen.

Tafel 32.

Das gleichseitige, gleichschenkelige und ungleichseitige Dreyeck.

Oben. Ein gleichseitiges Dreyeck. Anschauung seiner drey gleichen Seiten, und seiner drey gleichen Winkel.

Mitten. Ein gleichschenkeliges Dreyeck. Anschauung seiner zwey gleichen Seiten, der dritten (ungleichen (hier größern) Seite, der beyden gleichen spitzen Winkel und des dritten, ihnen ungleichen (hier größern) Winkels.

Unten. Ein ungleichseitiges Dreyeck. Anschauung seiner größten, mittlern und kleinsten Seite, seines größten, mittlern und kleinsten Winkels.

Tafel 33 und 34.

Das rechtwinkelige, spitzwinkelige und stumpfwinkelige Dreyeck.

Oben. Ein rechtwinkeliges Dreyeck. Anschauung des rechten Winkels und der beyden spitzen Winkel, der größten Seite, und der zwey kleinern Seiten.

Mitten. Ein spitzwinkeliges Dreyeck. Anschauung der drey spitzen Winlel dieses Dreyecks.

Unten. Ein stumpfwinkeliges Dreyeck. Anschauung des stumpfen Winkels und der zwey spitzen Winkel, der größten Seite und der zwey kleinern Seiten.

Tafel 35.

Das Quadrat, das Rechteck und die Raute.

Oben. Das Quadrat. Anschauung der vier gleichen Seiten, der vier rechten Winkel und der gegen einander überliegenden gleichlaufenden Seiten.

Mitten. Das Rechteck. Anschauung der vier rechten Winkel, der gegenüberliegenden gleichen Seiten und gleichlaufenden Linien.

Unten. Die Raute. Anschauung der vier gleichen Seiten, der gegen einander überliegenden gleichen (theils spitzen, theils stumpfen) Winkel und gleichlaufenden Linien.

Tafel 36.

Die Rhomboide, das Paralleltrapez und das Trapez.

Oben. Die Rhomboide. Anschauung der gegenüberliegenden gleichen und gleichlaufenden Seitenlinien; der gegenüberstehenden gleichen (theils spitzen, theils stumpfen) Winkel.

Mitten. Das Paralleltrapez. Anschauung der beyden Parallel-Seiten, welche ungleich sind und der beyden andern gegenüber liegenden Seiten, welche theils gegeneinander, theils aussereinander laufen.

Unten. Das Trapez. Anschauung seiner gegen einanderüberliegenden ungleichlaufenden Seitenlinien.

Tafel 37 und 38.

Die sechs Vierecke der zwey vorigen Tafeln in verschiedenen Lagen.

Oben, Mitten und Unten. Das Quadrat, das Rechteck, die Raute, die Rhomboide, das Paralleltrapez und das Trapez zur Uibung der Anschauung in andern Lagen.

Tafel 39.

Das Rechteck, die Rhomboide und das Trapez mit der Diagonallinie.

Oben. Das Rechteck mit einer Diagonallinie oder Querlinie. Anschauung der beyden Dreyecke, in welche das Rechteck hierdurch getheilt wird. Eines dieser (rechtwinkeligen) Dreyecke ist mit dem andern durchaus einerley.

Mitten. Die Rhomboide mit einer Diagonallinie. Anschauung der beyden durchaus gleichgestalteten Dreyecke, welche durch sie entstehen.

Unten. Das Trapez mit einer Diagonallinie. Anschauung der zwey ungleichgestalteten Dreyecke, welche hierdurch gebildet werden. — Gibt es in jedem dieser drey Vierecke nicht noch eine Querlinie? Wie wird jedes derselben durch diese zwey Diagonallinien getheilt?

Tafel 40.

Das regelmäßige Fünfeck, Sechseck und Siebeneck.

Oben. Das regelmäßige Fünfeck. Anschauung seiner fünf gleichen Seiten, seiner fünf gleichen Winkel, seines Mittelpuncts und des Polygonwinkels.

Mitten. Das regelmäßige Sechseck. Anschauung seiner sechs gleichen Seiten, seiner sechs gleichen Winkel, seines Mittelpuncts- und seines Polygonwinkels.

Unten. Das regelmäßige Siebeneck. Anschauung seiner sieben gleichen Seiten, seiner sieben gleichen Winkel, seines Mittelpuncts- und Polygonwinkels.

Tafel 41.

Das unregelmäßige Fünfeck, Sechseck und Siebeneck.

Oben. Das unregelmäßige Fünfeck. Anschauung seiner ungleichen Seiten und Winkel.

Mitten. Das unregelmäßige Sechseck. Anschauung seiner ungleichen Seiten und Winkel.

Unten. Das unregelmäßige Siebeneck. Anschauung seiner ungleichen Seiten und Winkel.

Tafel 42.

Der Kreis, dessen Mittelpunct, Halbmesser und Durchmesser.

Oben. Der Kreis und dessen Mittelpunct.

Mitten. Der Kreis und dessen Halbmesser.

Unten. Der Kreis und dessen Durchmesser.

Tafel 43.

Der Kreis. Die Sehne. Der Halbkreis. Der Quadrant.

Oben. Der Kreis und dessen Sehne. Anschauung der zwey Bogenstücke, in welche die Sehne den Kreis theilet. Diese Stücke sind ungleich.

Mitten. Der Halbkreis. Jeder Durchmesser bildet zwey gleiche Halbkreise.

Unten. Der Quadrant des Kreises. Anschauung des rechten Winkels, welchen die beyden Halbmesser bilden.

Tafel 44.

Die kleinere und größere Sehne. Die Tangente. Der Ausschnitt und Abschnitt.

Oben. Die kleinere und die größere Sehne. Anschauung der Bogenstücke, welche zu jeder derselben gehören und ungleich sind. Anschauung der Tangente oder Berührungslinie.

Mitten. Der Ausschnitt des Kreises. Der Winkel des Ausschnitts. Der Bogen des

Ausschnitts. Wodurch entstehen in dem nämlichen Kreise größere oder kleinere Abschnitte?

Unten. Der Abschnitt des Kreises. Die zum Abschnitte gehörigen zwey Bogen. Der größere und der kleinere Abschnitt.

Tafel 45.

Dreyeck in und um den Kreis beschrieben. Kreis in und um das Dreyeck beschrieben. Viereck in den Kreis; Kreis um das Viereck beschrieben.

Oben. Ein in den Kreis beschriebenes Dreyeck. Jede seiner drey Seiten ist eine Sehne im Kreise. Anschauung der hierdurch entstehenden drey Abschnitte. Ferner: ein um das Dreyeck beschriebener Kreis. Dieser Kreis geht durch die drey Scheitelpuncte des Dreyecks.

Mitten. Ein in das Dreyeck beschriebener Kreis. Jede Dreyecksseite ist eine Tangente des Kreises. Ferner: Ein um den Kreis beschriebenes Dreyeck.

Unten. Ein in den Kreis beschriebenes Viereck. Jede der vier Seiten des Vierecks bildet eine Sehne im Kreise. Anschauung der hierdurch entstehenden vier Abschnitte. — Ferner: Ein um das Viereck beschriebener Kreis. Die Kreislinie geht durch die vier Winkelpuncte des Vierecks.

Tafel 46.

Kreis in das Viereck; Viereck um den Kreis beschrieben. Das eingeschriebene und umschriebene Fünfeck.

Oben. Ein in das Viereck beschriebener

Kreis. Anschauung der hierdurch entstehenden vier Tangenten. — Ferner: Ein um den Kreis beschriebenes Viereck.

Mitten. Ein in den Kreis beschriebenes Fünfeck. Anschauung der fünf Seiten als Sehnen des Kreises und der hierdurch entstehenden fünf Abschnitte. — Ferner: Ein um das Fünfeck beschriebener Kreis. Dieser Kreis geht durch die fünf Winkelpuncte des Fünfecks.

Unten. Ein um den Kreis beschriebenes Fünfeck. Anschauung der fünf Seiten dieses Fünfecks als Tangenten dieses Kreises. — Ferner: Ein in das Fünfeck beschriebener Kreis.

Hier heißt auch (Tafel 45 Oben und Mitten) das in den Kreis beschriebene Dreyeck: das eingeschriebene Dreyeck, und der um das Dreyeck beschriebene Kreis: der umschriebene Kreis. Aehnliche Benennungen gelten von den übrigen Zeichnungen dieser Tafeln.

Schlußbemerkung.

Bey diesem Unterrichte mache es sich der Lehrer zum Gesetze, nicht eher etwas Neues vorzunehmen, bis das Frühere mit größter Klarheit gefaßt worden ist. Auch stelle er fleißige Wiederholungen an; besonders wenn irgend ein Hauptabschnitt beendiget ist. Ueberhaupt wird sich der verständige, mit dem Geiste dieser Methode vertraute Lehrer immer nach dem Bedürfnisse seiner Zuhörer richten.

Der
geometrischen Anschauungslehre
zweyter Cursus.

Zweyter Cursus.

Tafel 47.

Bezeichnung des Punctes, der geraden und der krummen Linie.

Oben. Zur Bezeichnung des Punctes bedient man sich eines kleinen lateinischen Buchstabens, welcher ihm zur Seite gesetzt wird. Dieses Mittel ist einfach, und bequem, mehrere Puncte von einander zu unterscheiden. Will man daher, von den hier stehenden vier Puncten, jenen benennen, welcher oben zur Linken steht, so heißt dieser: Punct a. Der oben rechts stehende heißt: Punct b. Unten rechts steht der Punct d, und links der Punct c. Ob diese Buchstaben die kleinen oder die großen des lateinischen Alphabets sind, und, ob man die ersteren oder die letzteren wählt, ist an sich einerley; doch fängt man meist mit a, b, c u. s. f. an.

Mitten. Jede gerade Linie wird mit zwey Buchstaben bezeichnet, wovon einer an ihr eines, der andere an ihr anderes Ende gesetzt wird. Hieraus ist verständlich, was man die gerade Linie ab,

die gerade Linie cd und die gerade Linie fg nennt. Der Anfang der geraden Linie ab bey a heißt: Anfangspunct, ihr Ende bey b der Endpunct derselben. Diese Linie kann aber auch bey b anfangen und dann ist ihr Ende bey a. Nun heißt b der Anfangspunct und a ihr Endpunct. Eben dieses gilt für den Anfangspunct und Endpunct der geraden Linien cd nnd fg. Auch ist es einerley, ob man sagt: Linie ab, oder: Linie ba. Doch mag man sich an die Ordnung des Alphabets gewöhnen.

Unten. Krumme Linien werden durch mehr, als zwey Buchstaben benennt. Um hier die obere zu bezeichnen, setzt man einige Buchstaben, z. B. b und c, zwischen den Anfangspunct a und den Endpunct d, an mehrere Stellen ihrer Krümmung, und sagt nun: Linie abcd, oder auch: Linie dcba. Wie viele Buchstaben hierzu erforderlich sind, hängt von der Länge und Krümmung der Linie selbst ab. Die untere kann mit drey Buchstaben: fgh, oder auch: hgf bezeichnet werden.

Tafel 48.

Bezeichnung des Winkels, seiner Schenkel und seines Scheitels. Anschauung der Theilwinkel, welche durch eine aus dessen Scheitel und zwischen den Schenkeln gezogenen geraden Linie entstehen.

Oben. Die gewöhnliche Art, den Winkel zu benennen, ist die vermittelst drey Buchstaben, wovon der mittlere an des Winkels Scheitel, der eine der zwey andern hingegen an seinen einen, der an-

dere aber an seinen andern Schenkel gesetzt wird. Der hier stehende Winkel heißt: Winkel abc, oder auch: Winkel cba. Allein man hüte sich zu sagen: Winkel bac, oder W. cab, oder W. bca, oder W. acb; denn bey a und bey c befindet sich kein Winkel.

Der eine Schenkel dieses Winkels heißt: ba oder ab, der andere bc oder cb, und des Winkels abc Scheitel ist der Punct b.

Da die Größe des Winkels nicht in der Länge der Schenkel, sondern in der Größe ihrer Neigung, oder ihrer Oeffnung besteht, so läßt sich W. abc auch so benennen: W. fbg, oder W. gbf, oder W. abg, oder Winkel gba u. s. w.

Eine zweyte Art den Winkel zu bezeichnen, besteht darin, daß man einen kleinen lateinischen Buchstaben (meist einen der letzten) in seine Oeffnung setzt. Anstatt W. abc kann man auch sagen: W. o. Diese Bezeichnung ist kürzer, als die vorige, und in vielen Fällen vorzuziehen, wie die Folge lehren wird.

Mitten. Wenn von dem Scheitelpuncte b des W. abc eine gerade Linie bd, zwischen den Schenkeln ba und bc jenes W. hindurchgehet, so wird der ganze W. abc hierdurch in zwey Winkel: abd und dbc getheilt. Es entstehen also durch die drey geraden Linien ba, bd, bc auch drey Winkel abc, abd, dbc, die in b einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben.

Winkel abd heißt auch: W. o, und W. dbc heißt: W. n. Beyde Winkel, o und n zusammen,

bilden den Winkel abc. Da der Schenkel bd sowohl zu dem W. o, als auch zu W. u gehört, folglich diesen beyden W. gemein ist, so heißt er: der gemeinschaftliche Schenkel.

Da W. o und W. u die Theile des W. abc sind, so muß sowohl W. o als auch W. u kleiner seyn, als der W. abc. Daher ist auch W. abc größer als W. o, und größer als Winkel u.

Unten. In der Oeffnung des Winkels abc befinden sich, von dem Scheitel b ausgehend, zwey gerade Linien bd und bf. Es entstehen hier im Ganzen sechs verschiedene Winkel; Nämlich: W. abc; W. abf; W. abd; W. dbc; W. dbf; W. fbc.

Da alle diese Winkel, einzeln genommen, nur Theile des W. abc sind, so ist dieser Winkel größer, als alle jene einzeln, und alle jene einzeln sind kleiner, als der Winkel abc. Daher ist W. o; W. u; W. x; W. (o und u); W. (u und x) kleiner, als Winkel abc.

Tafel 49.

Bestimmung der Zahl aller Winkel, welche durch mehrere aus einem Puncte gezogene gerade Linien entstehen. — Anschauung und Bezeichnung verschiedener Nebenwinkel.

Oben. Hier sind aus dem Scheitel b, des W. abc drey gerade Linien bd, bf, bg zwischen den Schenkeln ba und bc gezogen. Hierdurch werden zehn verschiedene Winkel gebildet. Nämlich: W. abd, W. abf; W. abg; W. abc; W. dbf; W. dbg; W. dbc; W. fbg; W. fbc; und W. gbc,

oder W. (o und u und x und y); W. o; W. (o und u); W. (o und u und x); W. u; W. (u und x); W. (u und x und y); W. x; W. (x und y); und W. y.

Die W. o und u haben bd, die W. u und x haben bf, und die W. x und y haben bg zum gemeinschaftlichen Schenkel. Aller dieser zehn Winkel gemeinschaftlicher Scheitel ist der Punct b.

Die Anzahl dieser sämmtlichen Winkel wird nach folgendem Gesetze bestimmt:

2 Schenkel	geben	. . . .	1	Winkel
3	«	« . . . 1 und 2 oder	3	«
4	«	« . . 1 u. 2 u. 3 oder	6	«
5	«	« . 1 u. 2 u. 3 u. 4 oder	10	«
6	«	« 1 u. 2 u. 3 u. 4 u. 5 oder	15	«
7	«	« 1 u. 2 u. 3 u. 4 u. 5 u. 6 oder	21	«

Im Allgemeinen heißt es:
n Schenkel geben 1 u. 2 u. 3 u. . . . n — 1 Winkel, deren Summe (nach der Progressionslehre) n — 1 multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ n ist. So geben z. B. 10 Schenkel die Zahl von 10 — 1 multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ 10 d. h. 9 mal 5 oder 45 verschiedene Winkel u. s. w. Die Richtigkeit des vorstehenden Gesetzes ergibt sich unmittelbar aus der Anschauung, wenn zu zwey Schenkeln ein dritter, zu drey ein vierter, zu vier ein fünfter kömmt, u. s. f.

Mitten. Es ist ab eine gerade Linie und aus d sind die zwey geraden Linien dc und df gezogen Hierdurch entstehen drey Winkel, nämlich: W. adc, W. cdf und W. fdb, oder auch: W. o, W. y,

und W. u. Da diese drey Winkel an dem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte d und an der geraden Linie ab nebeneinander liegen, so heißen auch diese drey Winkel: Nebenwinkel. W. o und W. y haben dc; W. y und W. u aber df zum gemeinschaftlichen Schenkel. Auch ist d der gemeinschaftliche Scheitelpunct dieser drey Winkel.

Unten. Hier werden von den vier geraden Linien ab, cd, ce und cf vier Nebenwinkel, als: W. x, W. y, W. u und W. o gebildet. Nun ist cd gemeinschaftlicher Schenkel von W. x und W. y, ce von W. y und W. u, cf von W. u und W. o. Der gemeinschaftliche Scheitel aller vier Winkel ist der Punct c.

Tafel 50.

Senkrechte und schiefe Linie. Rechte und schiefe Winkel. — Scheitelwinkel von drey und vier geraden Linien. — Die zwey innern Winkel, der äußere und innere Winkel und die Wechselwinkel.

Oben. Wenn der Winkel adc ein rechter Winkel ist, so heißt die Linie cd eine senkrechte oder lothrechte Linie auf ab. Auch nennt man diese cd hier ein Loth auf ab, und sagt: die dc stehe senkrecht oder lothrecht auf der geraden Linie ab.

Auf gleiche Weise ist auch ad senkrecht auf dc, und bd lothrecht auf dc; überhaupt ist jeder der Schenkel eines rechten Winkels ein Loth auf dem andern Schenkel.

Wenn aber der Winkel fdb ein spitzer und der

Winkel fda ein stumpfer ist, so wird die Linie df eine schiefe oder schiefstehende auf der geraden Linie ab genennt. Die beyden Winkel fdb und fda heißen hier: Die schiefen Winkel.

Der eine Schenkel eines jeden spitzen und stumpfen Winkels steht folglich schief auf dem andern.

Spitze und stumpfe Winkel werden daher mit einem gemeinschaftlichen Worte: schiefe Winkel genennt.

Mitten. Hier sind drey gerade Linien ab, cd, fg, welche sich in dem einen Puncte o durchschneiden, und hierdurch drey Paare Scheitelwinkel bilden. Es sind nämlich: W. aoc und W. dob, ferner W. cof und W. god, endlich W. fob und W. goa Scheitelwinkel; auch ist jeder Scheitelwinkel seinem zugehörigen gleich.

Wenn sich auf gleiche Weise vier gerade Linien in einem Puncte durchschnitten, so entständen vier Paare von Scheitelwinkeln, wovon die zugehörigen einander gleich sind.

Unten. Wenn die zwey geraden Linien ab und cd, von der dritten geraden Linie fg in h und p geschnitten werden, so heißt diese Linie fg die schneidende Linie. Es entstehen sowohl rings um h, als rings um p vier Winkel, die besondere Namen haben. Weil die W. bhg und dpf auf einer Seite der schneidenden fg und zwischen den durchschnittenen geraden Linien ab und cd liegen, so heißen sie: die beyden inneren Winkel. Kürzer bezeichnet man diese innere Winkel mit u und x. Auf der andern

Seite der schneidenden Linie fg entsteht ein anderes Paar solcher innern Winkel; nämlich: W. ahg und W. cpf. Wenn also zwey gerade Linien ab und cd von der dritten geraden fg geschnitten werden, so entstehen zwey Paare von innern Winkeln.

Der W. fhb heißt, in Rücksicht des W. fpd, der äussere Winkel; der W. fpd aber, in Hinsicht des W. fhb, der innere Winkel. Desgleichen ist W. gpd ein äusserer, und W. ghb der ihm zugehörige innere Winkel. Daher gibt es, auf einer Seite der schneidenden Linie fg, zwey Paare von äussern und innern Winkeln. Kürzer heißt man den einen äussern W. o, seinen innern x, den andern äussern y und seinen innern u. Es ist ersichtlich, daß es auch auf der andern Seite von fg zwey äussere und zwey innere Winkel gebe. Denn W. fha ist der äussere, und W. fpc sein innerer; eben so ist W. gpc der äussere und W. gha der ihm zugehörige innere.

Die W. ahg uud fpd, welche auf beyden Seiten der schneidenden Linie fg und innerhalb der geschnittenen Linien ab und cd liegen; so, daß keiner ein Nebenwinkel des andern ist, nennt man: Wechselwinkel. Hieraus ergibt sich, daß auch die W. bhg und cpf Wechselwinkel sind.

Noch kann man bemerken, daß, wenn zwey gerade gleichlaufende Linien von einer dritten lothrecht durchschnitten werden, sowohl die sämmtlichen innern Winkel, als auch alle äussere und innere, so wie auch die Wechselwinkel einan-

der gleich und lauter rechte Winkel sind, wie leicht durch eine Zeichnung anschaulich gemacht werden kann.

Tafel 51.

Bezeichnung des Dreyecks, seiner Seiten und Winkel. — Gegenüberliegende Seiten und Winkel. Anliegende Seiten und Winkel. Grundlinie und Höhe des rechtwinkeligen Dreyecks. Segmente der Grundlinie.

Oben. Um dieses Dreyeck zu bezeichnen, nennt man die drey Buchstaben, welche sich an den Scheitelpuncten seiner Winkel befinden. Das hier stehende Dreyeck bezeichnet man also mit: Dreyeck abc, oder: Dreyeck bca, oder: Dreyeck cab, oder: Dreyeck acb, oder: Dreyeck cba, oder: Dreyeck bac. Zur Bezeichnung jedes Winkels in diesem Dreyecke dient das Benennen desjenigen Buchstabens, welcher sich an dem Scheitelpuncte dieses Winkels befindet. Anstatt: Winkel abc kann man kurz sagen: Winkel b. Desgleichen bedeutet: Winkel a den Winkel bac und Winkel c den W. acb. Da nämlich an den Scheitelpuncten b, a uud c sich jedesmal nur ein Winkel befindet, so kann hier die Benennung des Winkels durch einen Buchstaben kein Mißverständniß veranlassen.

Die Betrachtung der Figur zeigt es, daß dem W. a die Seite bc, dem W. b die Seite ac und dem W. c die Seite ab gegenüber liege. Daher heißt bc in Bezug auf Winkel a; ac in Rücksicht auf W. b, und ab in Hinsicht auf W. c, die gegenüberliegende Seite.

Auf gleiche Weise muß auch jeder Seite ein Winkel gegenüberliegen. Für ab ist W. c, für bc ist W. a und für ac ist W. b der gegenüberliegende Winkel.

Ferner ist klar, daß jede zwey Seiten im Dreyecke einen Winkel einschließen, welcher der eingeschlossene Winkel genennt wird. Für die Seiten ba und ac ist W. a, für ac und cb ist W. c und für cb und ba ist W. b der eingeschlossene Winkel. Auch ist klar, daß an jeder Dreyecksseite zwey Winkel liegen, welche man die anliegenden zu nennen pflegt. Für die Seite ab sind W. a und W. b, für die Seite bc sind W. b und W. c, und für die Seite ac sind die W. a und W. c die anliegenden Winkel.

Desgleichen erhellet, daß jeder Winkel des Dreyecks von zwey Seiten gebildet wird, welche man die ihn einschließenden nennt; ferner, daß jede zwey Winkel eines Dreyecks an einer gemeinschaftlichen Dreyecksseite liegen.

Mitten. Wenn in dem Dreyecke acb die gerade Linie cd ein Loth von c auf ab ist, so nennt man die Seite ab die Grundlinie dieses Dreyecks, das Loth cd seine Höhe und den Scheitelpunct c seine Spitze.

Dieses Loth cd theilt das Dreyeck acb in zwey rechtwinkelige Dreyecke, cda und cdb, ab.

Die beyden Theile der Grundlinie ad und db heissen die Segmente oder Abschnitte der Grundlinie.

Unten. Da dieses Dreyeck fgh ein rechtwinke-

liges ist, so ist fg ein Loth auf gh. Nennt man daher gh die Grundlinie, so ist fg die Höhe des Dreyecks. Da aber auch hg ein Loth auf gf ist, so kann auch gf Grundlinie heißen, wo dann hg die Höhe ist.

Ist daher im rechtwinkeligen Dreyecke irgend eine Cathete die Grundlinie, so muß die andere des Dreyecks Höhe seyn.

Nimmt man die Hypotenuse fh zur Grundlinie, so ist das Loth ga des Dreyecks fgh Höhe.

Tafel 52.

Grundlinie und Höhe des stumpf- und spitzwinkeligen Dreyecks.

Oben. In dem stumpfwinkeligen Dreyecke amb, worin amb der stumpfe Winkel ist, sey ab die Grundlinie, so ist das Loth mn die Höhe dieses Dreyecks, und an, bn sind die beyden Segmente der Grundlinie.

Mitten. Wenn man in dem stumpfwinkeligen Dreyecke acd, welches einen stumpfen Winkel acd hat, die Seite cd zur Grundlinie nimmt, so wird das Loth ab nicht auf diese Grundlinie dc selbst, sondern auf ihre Verlängerung fallen. Hier liegt folglich die Höhe des Dreyecks nicht innerhalb, sondern ausserhalb desselben.

Unten. In dem spitzwinkeligen Dreyecke abc ist, für die Grundlinie bc, das Loth ad die Höhe; für die Grundlinie ac ist das Loth bn, und für die Grundlinie ab das Loth cm die Höhe

des Dreyecks. Diese drey Lothe durchschneiden sich in einem Puncte. Warum dieses geschehen müsse, lehrt die eigentliche Geometrie.

Man sieht hieraus, daß jede Seite des Dreyecks als Grundlinie angesehen werden kann, für welche es auch wiederum ein anderes Loth als Höhe gibt.

Tafel 53.

Drey Dreyecke vermittelst eines in einem Dreyecke angenommenen Punctes. — Der Aussenwinkel am Dreyeck und die beyden innern entgegenstehenden.

Oben. Wenn man in dem Dreyecke abc einen Punct d annimmt, aus welchem nach den drey Scheitelpuncten des Dreyecks: a, b und c gerade Linien da, db und dc gezogen sind, so entstehen innerhalb dieses Dreyecks drey andere Dreyecke, nämlich: Dreyeck bdc, Dreyeck cda und Dreyeck adb. Da diese drey Dreyecke zusammengenommen dem ganzen Dreyecke abc gleich sind, so muß jedes einzelne von ihnen kleiner, als das Ganze seyn. Auch betragen irgend zwey dieser Dreyecke zusammen weniger, als das ganze Dreyeck. Offenbar ist Dr. bda und Dr. bdc zusammen kleiner, als Dr. abc. Eben so Dr. cdb nebst Dr. cda kleiner, als Dr. bca; endlich Dr. adc und Dr. adb zusammen weniger, als Dreyeck bac.

Auch ergibt sich aus Betrachtung der Figur, daß jedes Paar dieser kleinen Dreyecke eine Linie mit einander gemein habe, welche man deshalb die gemeinschaftliche Seite nennt. So ist für Dr.

adb und adc die Seite ad, für Dr. bda und bdc die Seite bd, und für Dr. cdb und cda die Seite cd die gemeinschaftliche Seite.

Mitten. Wenn in dem Dreyecke abc die Seite bc bis d verlängert wird, so entsteht ausserhalb des Dreyecks ein Winkel acd, welchen man den Aussenwinkel, oder den Winkel an der verlängerten Seite nennt.

Die beyden Winkel im Dreyecke, nämlich W. cab und W. abc, deren keiner ein Nebenwinkel dieses Aussenwinkels ist, heißt man seine innere entgegenstehende Winkel. Wenn die Dreyecksseite ca nach f verlängert ist, so heißt Winkel fab der Aussenwinkel, und seine zwey innere ihm entgegenstehende Winkel sind: W. acb und W. cba.

Unten. An dem Dreyecke abc ist die Seite ab nach g und n, die Seite bc nach p und f und die Seite ac nach q und m verlängert, wodurch sechs Aussenwinkel, nämlich: W. abf, W. cbg, W. bcq, W. acp, W. can und W. bam entstehen.

Die zu einem jeden dieser Aussenwinkel gehörigen innern entgegengesetzten Winkel können sehr leicht gefunden und bezeichnet werden. Dieses Auffinden und Bezeichnen ist eine empfehlenswerthe Uebung für Anfänger. Auch kann diese Zeichnung sehr wohl zur Benennung der mancherley Nebenwinkel und Scheitelwinkel benützt werden.

Tafel 54.

Benennung des Quadrats, der Raute, des Rechtecks, der Rhomboide, des Paralleltrapez und des Trapez.

Oben. Jedes Viereck wird benennt, wenn man die vier Buchstaben, welche an dessen vier Scheitelpuncten stehen nennet, und dabey der aufeinander folgenden Ordnung dieser Scheitelpuncte folgt. Das Quadrat zur Linken nennt man daher: Quadrat abcd, die Raute zur Rechten: Raute mnpq.

Das Quadrat könnte auch mit bcda oder cdab oder dabc oder badc, adcb, dcba oder cbad bezeichnet werden Bisweilen benennt man auch die Vierecke mit zwey Buchstaben, welche sich an ihren gegenüberstehenden Winkelpuncten befinden. Das Quadrat kann auch mit: Quadrat ac, oder mit: Quadrat bd; die Raute mit: Raute mp oder mit: Raute qn bezeichnet werden.

Eben dieses gilt von jedem andern Vierecke.

Die vier rechten Winkel des Quadrates heißen kurz: W. a, W. b, W. c und W. d; dessen vier gleiche Seiten: Seite ab, Seite bc, Seite cd, Seite da, oder: Seite ba, Seite cb, Seite dc, Seite ad.

Auch diese Bezeichnung der Winkel und Seiten des Vierecks ist allen Vierecken gemein.

In der Raute mnpq sind die vier Seiten mn, np, pq und qm einander gleich. Nicht so alle Winkel. Denn der stumpfe Winkel m ist dem ihm gegenüberliegenden stumpfen Winkel p; der spitze

Winkel n dem ihm entgegenstehenden spitzen Winkel q gleich.

Mitten. Das Rechteck fgnm hat vier rechte Winkel f, g, n und m, auch sind die gegenüberliegenden Seiten fg und mn, eben so fm und gn einander gleich und auch gleichlaufend mit einander.

In der Rhomboide qpcb steht, gegen dem stumpfen Winkel q, ein ihm gleicher stumpfer Winkel c; eben so, dem spitzen Winkel p, ein ihm gleicher spitzer Winkel b gegenüber. Auch sind in der Rhomboide die gegenüberliegenden Seiten qp und bc, ferner qb und pc, einander gleich und unter sich gleichlaufend.

Unten. In dem Paralleltrapez abdc sind ab und cd die beyden parallelen oder gleichlaufenden Seiten. Diese Seiten sind immer ungleich. Die beyden andern gegenüberliegenden Seiten ac und bd sind hier nach Oben zusammen-, nach Unten auseinanderlaufend. Sie sind niemals gleichlaufend.

Das Paralleltrapez hat meist vier ungleiche Winkel. Doch können auch zwey Winkel in diesem Vierecke gleich seyn, wie hier die Winkel bey b und d, welche rechte W. sind.

Das Viereck mnqp, welches weder Quadrat noch Raute, weder Rechteck noch Rhomboide oder Paralleltrapez ist, heißt Trapez. Keine zwey seiner gegenüberliegenden Seiten, als mp und nq, oder mn und pq, sind gleichlaufend.

Dieses Trapez kann übrigens drey gleiche Seiten, oder auch zwey gleiche Winkel haben, wovon man

leicht Zeichnungen verfertigen kann; eine Uebung, welche sehr zu empfehlen ist.

Tafel 55.

Grundlinie und Höhe der Raute, der Rhomboide und des Paralleltrapez.

Oben. Wenn abdc eine Raute und an ein Loth von a auf cd ist, so heißt auch in diesem Vierecke cd die **Grundlinie** und an die **Höhe**. Nähme man die Seite bd zur Grundlinie an, so wäre das Loth am die Höhe der Raute. Für die Seite ab als Grundlinie ist das Loth na ebenfalls die Höhe, und für die Seite ac das Loth ma.

Mitten. Für die Rhomboide mndb ist eben so bd als **Grundlinie**, und die senkrechte Linie nc als **Höhe** zu betrachten. Wollte man mb als **Grundlinie** setzen, so würde das Loth na die dazu gehörige **Höhe** seyn.

Unten. In dem Paralleltrapeze abdc ist für cd als **Grundlinie** das Loth nm die Höhe. Wäre ab Grundlinie, so müßte mn wiederum die Höhe seyn. Eben so kann man auch die andern Seiten ac und bd als Grundlinien betrachten, und die ihnen zugehörigen Höhen bestimmen.

Ueberhaupt ist hieraus klar, daß jede der vier Seiten eines Vierecks als dessen Grundlinie angesehen werden kann. Für jede dieser Grundlinien gibt es sodann wieder eine besondere Höhe.

Tafel 56.

Die Diagonallinie im Vierecke, und die hierdurch entstehenden Dreyecke. — Der auswärtsgehende Winkel am Vierecke. — Vier Dreyecke im Vierecke.

Oben. Wenn in dem Vierecke abdc von einem Scheitelpuncte b nach dem ihm gegenüberstehenden c eine gerade Linie bc gezogen ist, so nennt man dieselbe eine Diagonale, oder Diagonallinie, oder Querlinie im Vierecke.

Aus Betrachtung der Zeichnung folgt, daß durch diese Diagonallinie das Viereck in zwey Dreyecke, nämlich: abc und bdc getheilt wird. Diese beyde Dreyecke haben die Diagonale bc zur gemeinschaftlichen Linie, und liegen auf entgegesetzten Seiten dieser Diagonallinie.

Stellte man sich, anstatt der geraden Linie bc, eine andere gerade von a nach d, d. h. eine Linie ad vor, so ist einleuchtend, daß hierdurch das Viereck in zwey andere Dreyecke abd und acd getheilt würde. Ihre gemeinschaftliche Linie wäre nun ad, und die Dreyecke selbst lägen auf entgegengesetzten Seiten dieser ad.

Mitten. In diesem Vierecke abcd sind zwey Diagonalen, ac und bd, gezogen. Sie durchschneiden sich in n und bilden hier die vier Dreyecke anb, bnc, cnd und dna, deren gemeinschaftlicher Scheitel der Punct n ist.

Die Dreyecke anb und dnc, so wie auch die Dreyecke bnc und and, heißen, wegen ihrer Lage, entgegengesetzte Dreyecke.

Da neben jedem dieser vier Dreyecke zwey andere liegen, so ergibt sich daraus, was man hier nebeneinanderliegende Dreyecke nennt. Es sind nämlich: and und anb, ferner and und dnc u. s. f. solche Dreyecke.

Auch haben solche nebeneinanderliegende Dreyecke eine Seite gemein. Für die Dreyecke and und anb, ist an, so wie für and und dnc, die dn diese gemeinschaftliche Seite.

Unten. In dem Vierecke abcda heißt der Winkel adc, weil sein Scheitelpunct d, nach der gezogenen geraden Linie ac, auf der nämlichen Seite von dieser ac liegt, auf welcher der Scheitelpunct b sich befindet, ein einwärtsgehender Winkel. Die drey übrigen Winkel dieses Vierecks, als dab, dcb und abc sind, wie gewöhnlich, auswärtsgehende Winkel.

In diesem Vierecke gibt es nur eine Diagonale nämlich: bd, denn ac fällt ausserhalb des Vierecks abcda.

Zum Schlusse von den Vierecken bemerke man noch Nachstehendes: Wenn in dem Vierecke ein Punct genommen und von demselben nach jedem Scheitelpuncte des Vierecks eine gerade Linie gezogen wird, so entstehen jedesmal vier Dreyecke, welche zusammengenommen das Viereck bilden. Jede zwey nebeneinander liegende haben eine gemeinschaftliche Seite. Durch eine Zeichnung ist dieses sehr leicht zu erläutern.

Tafel 57.

Bezeichnung des Fünfecks. Das unregelmäßige und regelmäßige Fünfeck. Polygonwinkel und Mittelpunctswinkel. Fünf Dreyecke in Fünfecke.

Oben. Das hier stehende Fünfeck heißt: abcdf. Jedes Fünfeck wird durch die fünf Buchstaben benennt, welche sich an seinen fünf Scheitelpuncten befinden. Bey welchem Puncte man die Benennung anfängt, ist willkührlich. Denn dcbaf, oder bcdfa, oder fdcba u. s. f. bezeichnen dieses Fünfeck richtig. Nur darf man, in der Ordnung der auf einander folgenden Winkelpuncten, keinen überspringen. Denn abdfc oder afbcd u. s. w. sind fehlerhafte Bezeichnungen.

Dieses Fünfecks Seiten sind hier ab, bc, cd, df und fa, und seine fünf Winkel heißen: W. a, W. b, W. c, W. d und W. f.

In diesem Fünfecke abcdf sind weder alle Seiten, noch alle Winkel gleich. Man nennt es daher ein unregelmäßiges Fünfeck.

Mitten. Das hier verzeichnete Fünfeck heißt: abcdf. Bey genauer Betrachtung desselben zeigt es sich, daß alle Seiten, nämlich: ab, bc, cd, df und fa einander gleich, so wie auch alle Winkel, nämlich: W. a, W. b, W. c, W. d, W. f gleich groß sind. Daher heißt dieses Fünfeck ein regelmäßiges Fünfeck.

Die Winkel fab, abc, bcd, cdf und dfa heißen die Polygonwinkel, oder Vieleckswinkel. Der Punct g, welcher in des Fünfecks Mitte liegt, ist dessen Mittelpunct.

Zieht man aus diesem Mittelpuncte g fünf gerade Linien ga, gb, gc, gd, gf, (welche in der Zeichnung absichtlich fehlen) so bilden dieselbe um den Mittelpunct herum fünf Winkel: agb, bgc, cgd, dgf und fga, deren jeder dem andern gleich ist. Jeden dieser fünf gleichen Winkel, nennt man Centriwinkel, oder Mittelpunctswinkel.

Jeder der gleichen Winkel fag und bag, abg und cbg u. s. f. heißt: der halbe Polygonwinkel, oder der halbe Vieleckswinkel.

Durch die fünf gerade Linien ga, gb, gc, gd und gf wird das ganze Fünfeck abcdf in fünf Dreyecke agb, bgc, cgd, dgf und fga getheilt, deren eines gerade so, wie jedes andere ist.

Unten. Wenn in dem unregelmäßigen Fünfecke fghmn, aus dem Puncte p die geraden Linien pf, pg, ph, pm und pn gezogen sind, so wird das ganze Fünfeck hierdurch in fünf Dreyecke fpg, gph, hpm, mpn und npf getheilt, welche alle den Punct p, als Scheitelpunct, gemein haben.

Auch kömmt jedem Paare nebeneinander liegender Dreyecke eine gemeinschaftliche Seite zu, welche in dem Fünfecke fghmn leicht aufzufinden und zu benennen sind.

In dem Fünfecke fghmn hat jedes dieser fünf Dreyecke zwey ihm gegenüberstehende. Dem Dreyecke fpn stehen die Dreyecke gph und mph gegenüber. Da nun diese zwey Dreyecke gph und mph das Viereck gpmh bilden, so steht jedem dieser fünf kleinern Dreyecke ein Viereck gegenüber.

Auf gleiche Art liegt auch jedem dieser in dem Fünfecke fghmn vorhandenen Vierecke ein Dreyeck entgegen. Das, dem Vierecke fpmn gegenüberstehende Dreyeck ist das Dreyeck gph.

Alles dieses kann nun, zur Uebung der Anfänger, an diesem Fünfecke fghmn sehr leicht durchgeführt werden.

Tafel 58.

Gegenüberliegende Seiten und Winkel im Fünfecke. Diagonalen im Fünfecke. Fünfzehn verschiedene Dreyecke durch Diagonalen. Einwärtsgehende Winkel im Fünfecke.

Oben. In dem Fünfecke abcdf hat jede Seite einen ihr gegenüberliegenden Winkel, und jeder Winkel eine ihm entgegenstehende Seite. Der Seite ab steht der W. d, der Seite bc der W. f, der Seite cd der W. a, der Seite df der W. b, und der Seite fa der Winkel c gegenüber.

Desgleichen liegt dem W. a die Seite dc, dem W. b die Seite df, dem W. c die Seite fa, dem W. d die Seite ab, und dem W. f die Seite bc gegenüber.

Sind nun von dem Scheitelpuncte a, nach den Endpuncten d und c, der diesem Winkel gegenüberstehenden Seite dc, zwey gerade Linien ad und ac gezogen, so heißen dieselbe die Diagonalen, oder Querlinien im Fünfecke. Sie theilen das Fünfeck in die drey Dreyecke afd, adc, und acb.

Von den Dreyecken adf und adc ist ad, von den Dreyecken acd und acb aber ac, die gemeinschaftliche Seite.

Da jedes Fünfeck fünf Scheitelpuncte hat, von jedem Scheitelpuncte aber, zu den Endpuncten der ihm gegenüberliegenden Seite, zwey Diagonalen Statt finden: so lassen sich in jedem Fünfecke zehn Diagonallinien denken. Ohne diese Linien alle zu ziehen, sollen sie blos angedeutet werden, da man dieselben leicht selbst zeichnen kann. Sie heißen: ad und ac, fb und fc, da und db, cf und ca, bd und bf, wovon jedoch fünf, nämlich: ad und da, ac und ca, fb und bf, fc und cf, db und bd die nämlichen sind. Da jede zwey aus einem Winkelpuncte gezogene Diagonalen das Fünfeck in drey Dreyecke theilen, so entstehen durch die, in dem Fünfecke möglichen, zehn Diagonallinien eigentlich fünfzehn Dreyecke. Sie sind folgende: Dr. afd, adc, acb, fdc, fcb, fba, daf, dab, dbc, cfd, cfa, cab, bcd, bdf, bfa.

Man sieht aber leicht, daß unter diesen fünfzehn Dreyecken fünf immer die nämlichen sind, nämlich: afd und daf, acb und cab, fdc und cfd, und endlich dbc und bcd. Daher gibt es eigentlich nur zehn verschiedene Dreyecke, in welche das Fünfeck durch Diagonalen getheilt werden kann. Diese Dreyecke sind: afd, fdc, dcb, cba, baf, dac, fbd, acf, bda und cfb.

Die fünf ersten Dreyecke heißen: ihrer Lage gemäß, die äussern; die fünf letztern aber die innern Dreyecke. Durch Beachtung dieses Unterschiedes kann man sich die in dem Fünfecke möglichen zehn Dreyecke am Bequemsten zur Anschauung brin-

gen. Jedes dieser äussern Dreyecke bildet mit einem danebenliegenden Vierecke das Fünfeck wieder. Zum Dreyecke afd gehört das Viereck dabc, zum Dreyecke fdc das Viereck cfab, zum Dreyecke dcb das Viereck dbaf, zum Dreyecke cba das Viereck acdf und zum Dreyecke baf das Viereck fbcd.

Jedes dieser Dreyecke hat mit dem danebenliegenden Vierecke eine gemeinschaftliche Seite, welche, nach der genannten Ordnung, die Seiten ad, fc, db, ca und bf sind.

Auf gleiche Weise hat jedes der innern Dreyecke zwey anliegende Dreyecke; z. B. das Dreyeck dac die Dreyecke daf und cab, und mit jedem dieser anliegenden Dr. eine gemeinschaftliche Seite; hier ad und ac.

Alles dieses kann nun nach allen möglichen Fällen an der Zeichnung durchgeführt werden.

Mitten. In diesem Fünfecke gacdfg sind die Winkel cag, agf, gfd und fdc auswärtsgehende; der Winkel acd aber ist ein einwärtsgehender Winkel.

Werden hier die Diogonallinien gc und fc gezogen, so entstehen in dem Fünfecke die drey Dreyecke: gca, gcf und fcd.

Was wegen der noch übrigen Diagonalen zu bemerken ist, kann leicht durch Zeichnungen anschaulich gemacht werden.

Unten. Das hier stehende Fünfeck abcdfa hat drey auswärtsgehende Winkel fab, abc und bcd; aber zwey einwärtsgehende, nämlich W. afd und W. fdc.

Durch die beyden Diagonallinien bf und bd, wird das Fünfeck wieder in drey Dr. bfa, bfd und bdc getheilt.

Aus der Anschauung dieser sämmtlichen Fünfecke ergibt sich nunmehr die allgemeine Regel: Jedes Fünfeck kann durch zwey, aus einem Winkelpuncte gezogene, Diagonallinien in drey Dreyecke getheilt werden.

Man bekömmt daher in diesem Falle so viele Dreyecke, als die getheilte Figur Seiten hat, weniger zwey.

Tafel 59.

Bezeichnung des Sechsecks. Regelmäßiges und unregelmäßiges Sechseck. Polygon= und Mittelpunctswinkel. Sechs Dreyecke im Sechsecke.

Oben. Die hier stehende Zeichnung ist ein Sechseck. Seine Seiten sind: ab, bc, cd, df, fg, ga; seine Winkel heißen: a, b, c, d, f, g. Das ganze Sechseck heißt: abcdfg, oder: dfgabc, oder: fgabcd, oder auch gfdcba u. s. w. Nicht aber abcgfd oder fdgacb u. s. w.

Dieses Sechseck hat weder sechs gleiche Seiten, noch sechs gleiche Winkel. Daher heißt es: ein unregelmäßiges Sechseck.

Mitten. Dieses Sechseck abcdfg ist ein regelmäßiges Sechseck. Denn alle Seiten: bc, cd, df, fg, ga, ab, sind gleich, so wie auch die sechs Winkel b, c, d, f, g, a, einander gleich sind.

Jede dieser sechs gleichen Seiten heißt: Seite des regelmäßigen Sechsecks, jeder der sechs

gleichen Winkel wird Polygonwinkel, oder Vieleckswinkel genennt. Der Punct h heißt des Sechseckes Mittelpunct.

Es ist wieder klar, daß dieses Sechseck durch die Linien ha, hb, hc, hd, hf, hg, in sechs Dreyecke getheilt werde, deren eines gerade wie das andere ist, und daß rings um den Punct h sechs gleiche Winkel entstehen, welche Centriwinkel oder Mittelpunctswinkel heißen.

Unten. Wenn aus dem Puncte o in dem Sechsecke abcdfg, sechs gerade Linien oa, ob, oc, od, of, og gezogen sind, so entstehen in dem Sechsecke sechs Dreyecke, nämlich: aob, boc, cod, dof, fog, goa, welche um den gemeinschaftlichen Scheitelpunct o herum liegen.

Auch hat jedes Paar nebeneinander liegender Dreyecke eine gemeinschaftliche Seite, die leicht zu finden und zu benennen ist.

Jedes der sechs Dreyecke, in welche das Sechseck getheilt worden ist, hat ein ihm gegenüberliegendes Dreyeck. Dem Dreyecke aob steht das Dreyeck fod gegenüber u. s. w.

Desgleichen hat jede Sechsecksseite eine andere, die ihr gegenüber liegt. Die gegenüberliegende Seite von ab ist fd, u. s. f. Eben dieses gilt auch von den Winkeln. Dem Winkel gab liegt der Winkel fdc gegenüber u. s. f.

Nach diesem Muster werden alle übrigen Anschauungen an diesem Sechsecke durchgeführt.

Tafel 60.

Diagonalen im Sechsecke. Achtzehn verschiedene Dreyecke. Verschiedene Figuren durch Diagonaltheilung. Einwärts-gehende Winkel im Sechsecke.

Oben. In dem Sechsecke mnopqr sind, aus dem Scheitelpuncte p, drey Diagonallinien: pr, pm und pn gezogen, welche das Sechseck in vier Dreyecke theilen. Sie sind: prq, pmr, pnm und pon.

Jedes Paar dieser nebeneinander liegenden Dreyecke hat eine gemeinschaftliche Seite.

Da man aus jedem der sechs Winkelpuncte des Sechsecks drey Diagonalen ziehen kann, welche jedesmal das Sechseck in vier Dreyecke theilen, so sind überhaupt sechsmal drey, oder achtzehn solcher Diagonalen möglich, wodurch im Ganzen viermal sechs, oder vier und zwanzig Dreyecke in dem Sechsecke entstehen.

Da aber unter diesen Dreyecken sechsmal die nämlichen vorkommen, so erhält man durch alle Diagonalen im Sechsecke eigentlich nur achtzehn verschiedene Dreyecke.

Diese sämmtliche Dreyecke sich durch die Anschauung klar zu machen, und durch die gehörigen Buchstaben zu benennen, ist eine lehrreiche Uebung für die Anfänger, die nun Keinem schwer fallen wird. Der bequemste Weg, um diese achtzehn Dreyecke zu erkennen, ist der, daß man zuerst alle äussere und sodann alle innere Dreyecke aufsucht. Da das Sechseck sechs Winkelpuncte und sechs diesen gegen-

überstehende Seiten hat, so müssen in demselben auch sechs äussere Dreyecke statt finden. Sie sind: Dr. rmn, mno, nop, opq, pqr und qrm. Da ferner aus jedem Winkelpuncte (z. B. aus p) durch drey Querlinien (pr, pm, pn) zwey innere Dreyecke (pmr und pmn) entstehen, so gibt es in dem Sechsecke überhaupt sechsmal zwey, d. h. zwölf innere Dreyecke, welche mit obigen sechs äussern zusammen achtzehn verschiedene Dreyecke bilden.

Durch eine Diagonale wird das Sechseck entweder in ein Fünfeck und in ein Dreyeck, oder in zwey Vierecke getheilt.

Durch zwey Diagonalen wird das Sechseck immer in zwey Dreyecke und in ein Viereck getheilt, welches entweder zwischen den beyden Dreyecken, oder zur Seite derselben sich befindet.

Drey Diagonalen theilen das Sechseck immer in vier Dreyecke. Die mancherley Fälle, welche durch diese Diagonalen entstehen können, müssen dem Anfänger durch Zeichnungen erläutert werden.

Mitten. In dem Sechsecke fghmno befinden sich vier auswärtsgehende Winkel, nämlich gfo, fon, onm, nmh, und zwey einwärtsgehende, als: fgh, ghm.

Die Eintheilung dieses Sechseckes durch Diagonallinien in Dreyecke, oder in Dreyecke und Vierecke, oder in Dreyecke und Fünfecke muß durch die nöthigen Zeichnungen zur klaren Anschauung gebracht werden.

Unten. Das hier stehende Sechseck abcdfg

enthält drey auswärtsgehende Winkel cba, bag und agf, desgleichen drey einwärtsgehende, nämlich: bcd, cdf, dfg. — Wegen der mancherley Diagonallinien gilt hier die vorige Bemerkung wieder.

Aus der bisher betrachteten Theilung der Sechsecke durch drey, aus einem Winkelpuncte gezogene, Diagonalen ergibt sich die Regel: Jedes Sechseck kann durch drey, aus irgend einem seiner Winkelpuncte gezogenen Diagonallinien in vier Dreyecke getheilt werden.

Auch hier erhält man auf diese Weise aus dem Sechsecke so viele Dreyecke als dasselbe Seiten hat, weniger zwey.

Tafel 61.

Das Siebeneck. Das regelmäßige und unregelmäßige Siebeneck. Gegenüberstehende Seiten und Winkel. Polygon- und Centriwinkel.

Oben. Dieses Siebeneck wird auf die nun bekannte Weise mit abcdfgh benennt. Seine sieben Seiten sind: ab, bc, cd, df, fg, gh, ha. Seine sieben Winkel heißen: a, b, c, d, f, g, h.

Da hier weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind, so ist dieses Siebeneck ein unregelmäßiges.

Aus Betrachtung dieses Siebenecks ist klar, daß jeder Seite ein Winkel, so wie auch jedem Winkel eine Seite gegenüber liegt. Der, der Seite cd gegenüberliegende Winkel ist h, so wie dem Winkel b, die Seite gf gegenüber steht. Es hat also jede Seite einen gegenüberliegenden Winkel und jeder Winkel eine gegenüberliegende Seite.

Unten. In dem Siebenecke gfdcbah sind alle Seiten und alle Winkel einander gleich. Daher heißt es ein regelmäßiges Siebeneck.

Werden aus seinem Mittelpuncte m die sieben geraden Linien mg, mf, md, mc, mb, ma und mh gezogen, so entstehen sieben gleiche Centriwinkel, oder Mittelpunctswinkel.

Auch hat dieses regelmäßige Siebeneck sieben gleiche Polygonwinkel, oder Vieleckswinkel.

Tafel 62.

Figuren durch Diagonaltheilung des Siebenecks. Alle Diagonalen geben fünf und dreyßig verschiedene Dreyecke. Drey allgemeine Gesetze: 1° für die Zahl aller Diagonalen aus einem Puncte; 2° für die hierdurch entstehende Zahl von Dreyecken; 3° für die Zahl aller verschiedenen Dreyecke durch alle Diagonalen.

Oben. Wenn aus dem Puncte q des unregelmäßigen Siebenecks hmnopfg sieben gerade Linien qh, qm, qn, qo, qp, qf und qg gezogen sind, so ist klar, daß das ganze Siebeneck hierdurch in sieben Dreyecke getheilt wird, deren gemeinschaftliche Spitze in q ist, und welche nun leicht mit Buchstaben zu benennen sind.

Ein Dreyeck hqm macht aus dem Siebenecke zwey Theile, deren einer eben dieses Dreyeck hqm, der andere aber das Achteck qhgfponmq mit dem einwärtsgehenden Winkel mqh ist.

Zwey Linien qh und qn bilden in dem Siebenecke ein Viereck hqnm, und ein Siebeneck qhgfponq mit dem einwärtsgehenden Winkel nqh.

Diese Uebung kann leicht weiter fortgesetzt werden. Daher wird sie hier nicht ferner ausgeführt.

Unten. In dem Siebenecke ghnbcdf gibt es aus dem Puncte g vier Diagonalen: gn, gb, gc und gd, welche dasselbe in fünf Dreyecke: ghn, gbn, gcb, gdc und gfd theilen.

Da aus jedem Winkelpuncte des Siebenecks vier Diagonalen möglich sind, so gibt es im Ganzen viermal sieben, oder acht und zwanzig Diagonallinien; und da durch jede vier zusammengehörige Diagonalen fünf Dreyecke entstehen, so sind in dem ganzen Siebenecke fünfmal sieben, oder fünf und dreyßig, Dreyecke möglich.

Da aber unter diesen Dreyecken sieben die nämlichen sind, so gibt es in dem Siebenecke eigentlich nur acht und zwanzig verschiedene Dreyecke, welche man sich am kürzesten zur Anschauung bringt, wenn alle äussere und alle innere Dreyecke aufgesucht werden. Man findet sogleich sieben äussere und für jeden Winkelpunct drey innere Dreyecke; folglich überhaupt ein und zwanzig innere, welche mit den sieben äussern die Summe von acht und zwanzig verschiedenen Dreyecken bilden.

Die Anschauung des Siebenecks führt auch hier zur Regel: Jedes Siebeneck kann durch vier, aus einem Mittelpuncte gezogene, Diagonalen in fünf Dreyecke getheilt werden.

Man hat daher auch nun wieder soviele Dreyecke, als das Siebeneck Seiten hat, weniger zwey.

Wie vielerley Sechsecke, Fünfecke und Vierecke

durch die Diagonalen des Siebenecks möglich sind, ergibt sich leicht aus den Zeichnungen, und wird hier wieder zur Uebung anempfohlen.

Aus den seitherigen Lehren von den 4, 5, 6 und 7 Ecken ergeben sich nunmehr folgende allgemeine Gesetze:

1° In jeder mehrseitigen geradlingen Figur gibt es von einem ihrer Winkelpuncte soviele Diagonalen, als die Figur Seiten hat, weniger drey. In dem n Ecke (wo n jede ganze Zahl bedeutet) gibt es auf diese Weise n — 3 Querlinien. Da nämlich jeder Winkelpunct eines solchen Vielecks in dem Scheitel eines Winkels liegt, dessen zwey Schenkel die beyden Vieleckseiten sind, so hat jener Winkelpunct immer drey ihm gegenüber liegende Puncte weniger, als im gegebenen Vielecke überhaupt Winkelpuncte sind.

2° Jedes geradlinige Vieleck gibt durch Diagonalen, welche aus einem Puncte desselben gezogen werden, soviele Dreyecken, als dasselbe Seiten hat, weniger zwey. In dem n Ecke erhält man hierdurch n — 2 Dreyecke. Denn in dem n Ecke gibt es aus einem Winkelpuncte n — 3 Diagonallinien und die Anschauung lehrt unwidersprechlich, daß man in jedem Vielecke ein Dreyeck mehr erhält, als Diagonalen aus einem Puncte möglich sind. Folglich gibt es hier n — 2 Dreyecke.

3° Die Anzahl aller verschiedenen Dreyecke, welche durch alle in einem Vielecke mögliche Diagonallinien entstehen

können, wird gefunden, wenn man die um drey verminderte Zahl der Vielecksseiten mit dieser unverminderten Zahl multiplicirt. In n Ecke gibt es (n — 3) mal n verschiedene Dreyecke. Für n = 10 erhält man im 10 Ecke 10 — 3 mal 10 d. h. 7 mal 10 oder 70 verschiedene Dreyecke. Denn da es (nach 2°) im n Ecke aus einem Winkelpuncte n — 2 Dreyecke gibt, und dieses Vieleck n Winkelpuncte hat, so bekömmt man überhaupt (n — 2) mal n d. h. n mal n — 2 n solcher Dreyecke. Allein man erkennt leicht aus der Anschauung, daß unter diesen Dreyecken n mal die nämlichen vorkommen (nämlich die äussern). Folglich ist die Gesammtzahl aller verschiedenen Dreyecke n mal n weniger 3 n oder (n — 3) mal n.

Tafel 63.

Kreislinie, Kreisbogen, Halbmesser, Durchmesser, Tangente, Linienquadrant, Flächenquadrant, Ausschnitt, Abschnitt.

Oben. Um die Kreislinie zu bezeichnen, benennt man die an derselben stehenden Buchstaben, z. B. adblımga. Jedes Stück dieser krummen Linie, welches man Kreisbogen nennt, wird mit einigen daran stehenden Buchstaben bezeichnet, z. B. dbh, oder hmg, oder gad.

Der Halbmesser dieses Kreises ist entweder cd, oder ca, oder cb. Die Linie ab ist des Kreises Durchmesser; die krumme Linie adb die halbe Kreislinie, wovon die andere Hälfte agmhb heißt.

Die gerade Linie gh ist eine Sehne, und die krumme Linie gmh der zu dieser Sehne gehörige Bogen. Die gerade Linie pq ist die Tangente, oder Berührungslinie des Kreises.

Unten. Das Stück ahb, welches der vierte Theil der ganzen Kreislinie ist, heißt: der Linienquadrant. Zieht man von a und b die Halbmesser ac und bc, so ist acb ein rechter Winkel, und das Stück acbha, als der vierte Theil der Kreisfläche, wird der Flächenquadrant genennt.

Den von dem Bogen mdn und der Sehne mn gebildeten Abschnitt bezeichnet man mit mndm, der mdnm. Der von den Halbmessern cm und cn, und dem Bogen mdn gebildete Ausschnitt wird durch die Buchstaben mcndm, oder ndmcn ausgedrückt. Die Anschauung lehrt hier, daß das Dreyeck mcn und der Abschnitt mdnm zusammen den Ausschnitt cmdnc bilden.

Tafel 64.

Mittelpuncts- und Peripherie-Winkel. Aeusserer und innerer Winkel. Aeusserer und innerer Kreis. Der Ring und Ausschnitt des Ringes.

Oben. Der Winkel acb, dessen Scheitel c der Mittelpunct des Kreises ist und dessen Schenkel die zwey Halbmesser ca und cb sind, heißt: ein Winkel am Mittelpunct, oder Mittelpunctswinkel. Der Theil der Kreislinie afb zwischen seinen Schenkeln heißt: der Bogen, worauf er steht.

Der Winkel dma, dessen Scheitelpunct m in der Kreislinie liegt, und dessen Schenkel md und ma

Sehnen des Kreises sind, wird ein **Winkel an der Peripherie**, oder auch **Peripheriewinkel** genennt. Das zwischen seinen Schenkeln enthaltene Stück der Kreislinie da heißt: der **Bogen, worauf er steht**.

Der Winkel dgb, dessen Scheitel g sich ausserhalb des Kreises befindet, dessen Schenkel gb und gd aber zum Theil Sehnen des Kreises (nämlich md und nb) sind, heißt: ein **äusserer Winkel am Kreise**; so wie der Winkel dha, der mit seinem Scheitel h innerhalb der Kreislinie liegt, ein **innerer Winkel** genennt wird.

Unten. Von den beyden hier stehenden Kreislinien, die den nämlichen Mittelpunct c gemein haben, heißt: aqprba der **äussere**; mdfnm der **innere Kreis**. Der Halbmesser des äussern Kreises ist: ca oder cb, jener des innern ist: cm oder cn.

Diejenige Fläche, welche von der äussern und innern Kreislinie eingeschlossen ist, wird der **Ring** genennt, und jene, welche zwischen den beyden Bogen agb, mhn, und den geraden Linien am und bn enthalten ist, nennt man: den **Ausschnitt des Rings**, welcher daher durch agbnhm bezeichnet wird.

Schlußbemerkung.

Auch hier folge der verständige Lehrer dem Gesetze, nicht eher zum folgenden Cursus zu schreiten, bis alles Vorhergehende vollkommen eingeübt ist. Eine zweckmäßige Uebung ist die Seele dieses Unterrichtes.

Der

geometrischen Anschauungslehre

dritter Cursus.

Dritter Cursus.

Tafel 65.

Entstehung der geraden, gebrochenen und der krummen Linie. Erklärungen davon. Die Theile gerader Linien sind gerade, krummer Linien aber krumme Linien. Zwischen zwey bestimmten Puncten gibt es nur eine gerade, aber unzählige krumme Linien. Vermischte Linien. Verschiedenheit der gedachten und der sichtbaren Linien.

Oben. Wenn sich ein, auf der Tafel oder auf dem Papiere gegebener, Punct a dergestalt auf der Tafel oder über das Papier fortbewegt, daß er Spuren dieser Bewegung zurückläßt, so beschreibt er eine Linie. Da dieser Punct a nach allen möglichen Richtungen auf der Tafel oder auf dem Papiere fortschreiten kann, so entstehen hieraus höchst mannichfaltige Linien, die sowohl nach ihren Richtungen, als nach ihren Gestalten, verschieden seyn können.

Mitten. Bewegt sich der Punct a dergestalt gegen den Punct b, daß er immer nach einer und

derselben unveränderten Richtung in seiner Bewegung fortschreitet, so beschreibt er die gerade Linie ab.

Bewegt sich derselbe von a nach q in gerader Richtung, und schreitet sodann wieder in gerader Richtung von q nach b, so ist sein Weg die gebrochene oder Winkellinie aqb.

Bewegt sich aber dieser Punct a dergestalt gegen b, daß er in jedem Augenblicke seine vorige Richtung verläßt, und in einer andern fortschreitet, so beschreibt er eine krumme Linie z. B. acdb, oder amnb, oder ahb.

Bey allen diesen Linien sieht man weder auf die Breite, noch auf die Dicke, sondern blos auf ihre Länge. Dies gilt sowohl von Linien, welche man mit einem Stücke zugespitzter Kreide auf der schwarzen Tafel, oder mit dem Bleystifte auf das Papier verzeichnet. Diese Linien bestehen zwar wirklich aus kleinen Körperchen von Kreide oder von Reißbley, welche sich an die Tafel oder auf das Papier angehängt haben; allein man betrachtet an ihnen weder diese Körperchen, noch ihre Breite, sondern blos ihre Länge.

Daher versteht man unter einer Linie jene Ausdehnung im Raume, die sich nur nach der Länge erstreckt.

Die gerade Linie ist jene Linie, welche sich nur nach einer einzigen Richtung hin erstreckt.

Die krumme heißt jene Linie, welche sich in ihrem allmähligen Fortschreiten nach sehr vielerley Richtungen erstreckt.

Die gebrochene oder Winkellinie heißt jene Linie, welche ihre erste gerade Richtung plötzlich verläßt und nach einer andern, ebenfalls wieder geraden Richtung, sich weiter erstreckt.

Unten. Die Theile jeder geraden Linie sind selbst wieder gerade Linien.

Wenn ah eine gerade Linie ist, so sind die Theile ab, bc, cd, dh, so wie auch ac, ad oder bc, bd u. s. w. wiederum gerade Linien.

Die krumme Linie besteht aber aus Theilen, die selbst wieder krumme Linien sind. Die krumme Linie abcdf kann zwar in Theile ab, bc, cd, df getheilt werden; allein jeder dieser Theile ist selbst eine krumme Linie, gleichwie auch abc, bcd; cdf u. s. f., krumme Linien sind. Wenn man die Theilchen von geraden oder von krummen Linien noch so klein macht, so bleiben jene immer gerade und diese krumme Linien. Daher sind gerade und krumme Linien ursprünglich verschieden. Doch können sehr kleine Stückchen krummer Linien, ohne großen Fehler, für gerade gehalten werden und dieses um so mehr, je kleiner sie sind.

Zwischen zwey gegebenen Puncten a und b (Mitten) ist nur eine einzige gerade Linie möglich. Dagegen gibt es zwischen diesen beyden Puncten unzählig viele gebrochene, oder krumme, oder vermischte Linien.

Vermischte Linien heißen nämlich jene Linien, welche theils aus geraden, theils aus krummen bestehen.

Wenn man sich eine gerade Linie mit Kreide auf der schwarzen Tafel, mit Dinte oder Tusche oder Bleystift auf dem Papiere, oder durch eine angespannte Schnur, oder einen Drath u. s. f. denket, so bemerkt man, daß das Eigenthümliche der Linie nicht in der Kreide, noch in der Dinte u. s. f. besteht, sondern lediglich in der geraden Ausdehnung nach der Länge. Wer sich auf dem Felde, z. B. von einem Baume nach dem andern, eine gerade Linie vorstellt, denkt sich weder eine gespannte Schnur, noch einen Drath, noch weniger einen Strich von irgend einer Farbe, sondern eine Ausdehnung nach der bloßen Länge, in gerader Richtung, von einem Baum zum andern. Diese Linie ist also eine blos gedachte und keine mit Augen gesehene. Sie ist in uns und nicht ausser uns. Eben so ist's mit einer geraden Linie, die man sich z. B. von der Spitze eines Thurmes auf den Boden lothrecht denkt. Diese blos gedachte Linien haben weder Breite noch Dicke, sondern nur Länge. Um sie anschaulicher zu machen, bedienen wir uns der bekannten sichtbaren Linien von Kreide, Bleystift u. s. f.

Alle Linien, welche man auf die Tafel oder auf das Papier sichtbar zeichnet, sind also nichts, als Stellvertreter derjenigen Linien, die wir uns eigentlich nur denken. Je feiner und zärter solche sichtbare Linien gezogen werden, desto genauer entsprechen sie der blos gedachten Linie, deren Natur einzig in der Länge besteht.

Anmerkung. Diese Betrachtungen bilden den wichtigen Uebergang von der äussern Anschauung zur innern; von dem, was das Auge sieht, und der Verstand denkt. Daher ist es durchaus nothwendig, den Schüler nunmehr von der äussern Betrachtung mehr nach der innern zu leiten, damit alles Mechanische vermieden, das Geistige aber zur klaren Erkenntniß gebracht werde.

Tafel 66.

Das Decken gleichgroßer geraden Linien. Unterschied des Ineinander- und Aufeinander-Fallens. Gerade Linien welche sich decken, sind einander gleich. Gerade Linien von einander abzuziehen und zusammen zu addiren. Gebrauch des Cirkels.

Oben. Es seyen ab und cd zwey gleichgroße gerade Linien, so kann man in Gedanken die Linie ab dergestalt in die Linie cd bringen, daß der Punct a in den Punct c und die Linie ab längs der Linie cd liegt. Da ab und cd gleich groß sind, so fallen gewiß auch ihre Endpuncte b und d in einander. Die gerade Linie ab liegt also hier so in der geraden Linie cd, daß man ab und cd gar nicht mehr unterscheiden kann. Die vorhin getrennten Linien ab und cd bilden nun eine einzige gerade Linie cd. Eben so hätte man cd in ab legen können, daß c in a, cd längs ab und d in b gefallen wäre, und dann würden die zuvor getrennten Linien cd und ab nur eine einzige gerade Linie ab gebildet haben. Dieses gänzliche Ineinanderfallen zweyer geraden Linien nennt man: das Decken derselben, oder ihre Congruenz.

Man hüte sich, dieses Zueinderfallen zweyer geraden Linien mit ihrem Aufeinanderfallen oder Aufeinanderliegen zu verwechseln. Wären z. B. ab und cd zwey gerade, gleichlange und durchaus gleichgeformte, viereckige Stäbchen von Holz, so könnte man wohl das Stäbchen ab auf das andere cd legen. Diese Stäbchen könnten aber nie ineinanderfallen, da jedes, als physischer Körper, das Eindringen des andern in seinen Raum verhindert. Hier hätte also ein bloßes Aufeinanderfallen oder Aufeinanderliegen statt. Allein geometrische Linien sind keine physische Körper, welche einander Widerstand leisten, und wir können uns in den nämlichen Puncten a und b der geraden Linie ab, auch die Puncte c und d der gleichgroßen geraden Linie cd denken, so daß nun cd und ab gänzlich ineinanderfallen.

Hieraus folgt der klare Satz: Wenn zwey gerade Linien einander gleich sind, so können sie so ineinander gelegt werden, daß sie sich decken.

Umgekehrt. Alle gerade Linien, die sich decken, müssen gleichgroß seyn.

Mitten. Wenn die gerade Linie ab kleiner ist, als die gerade cd, so kann jene so in diese gelegt werden, daß a in c und ab längs cd fällt. Da nun ab kleiner als cd ist, so muß b zwischen c und d, z. B. in m, fallen, und die Linie ab wird nur einen Theil der Linie cd decken. Die Linie md wird hier den Unterschied bestimmen, um welchen cd größer als ad ist.

Von zwey geraden Linien ist also jene die kleinere, welche, gehörig in die größere gelegt, einen Theil der größern decket; jene aber wird die größere genennt, von welcher nur ein Theil durch die andere gedeckt werden kann.

Practisch bestimmt man den Unterschied der Größe zweyer geraden Linien durch den Cirkel. Wenn man nämlich die Endpuncte der Linie ab mit den Spitzen der Cirkelfüße fasset, sodann diese eine Spitze in den Endpunct c setzt und mit dem andern auf der Linie cd in m ein Merkmal macht, so gibt md an, um wie viel cd größer als ab ist. Dieses mechanische Verfahren beruht aber, wie man leicht sieht, auf der strengen Theorie, weil zwischen zwey Puncten (dergleichen die beyden Cirkelspitzen sind) nur eine gerade Linie möglich ist.

Hierdurch ist nun auch die Aufgabe: Eine kleinere Linie von einer größern abzuziehen, aufgelößet.

Unten. Aus der Natur der geraden Linie folget, daß der Punct, durch dessen Bewegung sie hervorgebracht wurde, auf beyden Seiten in der nämlichen Richtung noch weiter fortschreiten kann. Hierdurch wird die gerade Linie über jeden Endpunct hinaus vergrößert werden. Dieses Größerwerden der geraden Linie nach ihrer ursprünglichen Richtung, heißt man das Verlängern derselben, und es ist klar, daß jede gerade Linie zu beyden Seiten ohne Ende verlängert werden kann.

Dies Verlängern gerader Linien geschieht practisch oder mechanisch durch das Lineal, oder auf

andere Weise; so, daß zur wirklichen Ausführung immer einige Handgriffe erfoderlich sind. Bey blos gedachten geraden Linien aber braucht man nur zu denken, sie seyen auf beyden Seiten verlängert, wodurch sie denn wirklich in Gedanken verlängert sind.

Soll man mehrere gerade Linien, wie ab, cd, fg in eine einzige gerade verwandeln, d. h. ihre Summe finden, so denke man sich irgend eine gerade Linie mr von unbestimmter Länge. Wird nun die ab gehörig von m längs r gelegt, so fällt b in n und die Linien ab und mn decken sich. Wird eben so die cd in no, die fg in op gelegt, so entspringt eine einzige gerade Linie mp, welche den drey gegebenen zusammengenommen gleich ist. Practisch geschieht dies wiederum am Einfächsten mit dem Cirkel, dessen Anwendung hier abermals mit der strengen Theorie übereinstimmt.

Tafel 67.

Gerade Linien decken sich, wenn ihre Endpuncte in einander fallen; nicht so zwey krumme Linien. — Erklärung der Fläche an den zwey Hauptrichtungen des Rechtecks. Sie hat nur Länge und Breite, aber keine Dicke.

Oben. Wenn man weiß, daß zwey gerade Linien mit ihren Endpuncten ineinanderfallen, so müssen sich auch dieselbe decken, da zwischen zwey Puncten nur eine einzige gerade Linie möglich ist.

Wenn aber die gerade Linie ab und die krumme Linie amnb ihre Endpuncte gemein haben, so decken sie sich dennoch nicht, so wenig als die krumme Linie

amnb und die andere krumme ahrb, die ebenfalls gemeinschaftliche Endpuncte haben.

Mitten. Krumme Linien können sich daher nur dann decken, wenn sie bey gleichen Endpuncten auch einerley Krümmung haben und nach gehöriger Lage in einander gelegt werden. Wenn in dem Kreise abmna die Mittelpunctswinkel acb und mcn rechte Winkel sind, so wird der Kreisbogen ab den Kreisbogen mn decken können, da dieselbe vollkommen einerley Krümmung haben.

Will man das Decken zweyer krummen Linien erkennen, so muß man überzeugt seyn, daß alle Puncte der einen in die zugehörigen Puncte der andern fallen.

Unten. Das Viereck abdc ist ein Rechteck, jede seiner vier Seiten ist eine gerade Linie, und als solche nur nach der Länge ausgedehnt. An dem Rechtecke selbst aber, welches von den vier Seitenlinien gebildet wird, erkennt man ausser der Länge (von c nach d) auch noch eine Breite (von c nach a). Dieses Rechteck ist also sowohl nach der Länge, als nach der Breite ausgedehnt. Diese doppelte Ausdehnung nach der Länge und Breite bemerken wir eben so an dem Papiere, worauf dieses Rechteck verzeichnet ist, oder an der Tafel, auf welcher wir unsere Zeichnungen vorstellen.

Diejenige Ausdehnung im Raume, welche sich nach der Länge und Breite erstreckt, heißt eine Fläche.

Wenn man von der Fläche eines Tisches, eines Feldes, des Fußbodens oder der Seitenwand eines

Zimmers u. s. f., spricht, so denkt man nur an Länge und Breite, keineswegs aber an die Dicke. Wir können uns daher blose Länge und Breite vorstellen, ohne auf die Dicke zu sehen, welche bey allen physischen Körpern noch mit der Länge und Breite verbunden ist. Wenn wir z. B. von der Fläche der hölzernen Schultafel sprechen, so denken wir gar nicht an die Dicke der Bretter, woraus sie besteht. Eben so wenig beachtet man die Dicke, wenn von der Größe eines Feldes, einer Wiese u. dgl. die Rede ist.

Tafel 68.

Erklärung der ebenen und krummen Fläche, der einseitig und allseitig gekrümmten Fläche. Ihre Entstehung. — Entstehung und Erklärung des ebenen geradlinigen Winkels, des krumm- und gemischtlinigen Winkels. — Gleiche Winkel können sich decken. Ungleiche Winkel decken sich zum Theil und man findet ihren Unterschied.

Oben. Wenn man sich auf der Fläche dieses Papiers beliebige Puncte: a und b, c und d, f und g, m und n u. s. f., vorstellt, so werden die sie verbindenden geraden Linien, ab, cd, fg, mn nach ihrer ganzen Länge innerhalb der Fläche des Papiers liegen. Die Papierfläche ist also eine solche, die in jeder Richtung nach Länge und Breite eine gerade ist.

Eine Fläche, worin alle gerade Linien, die man zwischen beliebigen Puncten in ihr ziehen kann, ganz in der Fläche liegen, heißt eine gerade Fläche, eine ebene Fläche oder eine Ebene. Jene Flächen aber, bey welchen gerade Linien, die

man nach verschiedenen Richtungen in sie legt, nicht ganz hineinfallen, nennt man krumme Flächen. Ein zusammengekrümmtes Kartenblatt, die Umfangsfläche einer Walze, die krumme Oberfläche einer Kugel u. s. f. erläutern dieses.

Diese krummen Flächen sind entweder einfachgekrümmte oder allseitiggekrümmte. Bey jenen lassen sich von einigen in ihnen gewählten Puncten nach andern darin angenommenen Puncten gerade Linien ziehen, welche ganz und gar in sie hineinfallen; bey diesen aber wird nicht eine einzige gerade Linie ganz in sie gelegt werden können. Auf der krummen Fläche einer Walze sind, in der gehörigen Richtung von Oben nach Unten, sehr viele gerade Linien möglich, aber keine einzige gerade Linie kann, nach einer andern Richtung, durchaus in dieser krummen Oberfläche liegen. Eben dieses hat bey der krummen Kegelfläche statt. Daher sind die krummen Flächen der Walze und des Kegels einfachgekrümmte. In der Kugelfläche dagegen läßt sich auch nicht eine einzige gerade Linie denken, welche ganz in sie hineinfällt. Folglich ist diese eine allseitiggekrümmte Fläche.

Anmerkung. Es ist sehr rathsam, kleine Modelle von der Walze, dem Kegel, der Kugel u. s. f., etwa von Holz verfertigt, dem Schüler vorzuzeigen, um sowohl die Anschauung, als den Begriff dieser krummen Flächen, vollkommen klar zu machen.

Gleichwie die gerade Linie aus Bewegung des Punctes entsteht, so läßt sich die ebene Fläche oder

die Ebene durch Bewegung einer geraden Linie erkennen. Wenn nämlich eine gerade Linie sich dergestalt nach der Seite beweget, daß sie bey ihrem Fortschreiten durchaus die nämliche Lage beybehält, so beschreibt sie eine ebene Fläche. Schreitet diese Linie dagegen in immer veränderter Richtung fort, so erzeugt sie eine krumme Fläche.

Anmerkung. Was man hier unter Fortschreiten der Linie in der nämlichen Lage, oder unter ihrem Fortschreiten in immer veränderter Richtung versteht, muß vorzüglich durch die Anschauung aufgeklärt werden. Die schärfere wissenschaftliche Bestimmung desselben gehört in die Körperlehre (Stereometrie).

Ein dünnes, gerades Stäbchen von Holz, welches lothrecht auf der Ebene des Tisches steht und sich in dieser Lage mit seinem Ende über einer auf dem Tische gezogenen geraden Linie fortbewegt, dienet zur Versinnlichung der Art und Weise, wie aus Bewegung der geraden Linie eine Ebene entsteht. Bewegt sich dagegen dieses Holzstäbchen auf ähnliche Weise über eine auf dem Tische vorhandene krumme Linie fort, so gibt dieses ein Bild von Erzeugung der krummen Fläche.

Man bemerke, daß die geometrische Ebene, gleich der Linie, eine blos gedachte und keine gesehene ist. Denn wenn man z. B. von der Ebene eines Gartens, einer Wiese u. s. f. spricht, so ist dieselbe nicht in dem an sich mehr oder weniger unebenen Felde, sondern nur in der Vorstellung vorhanden.

Indessen dient z. B. die äussere Fläche der schwarzen Schultafel, oder die Fläche des Papiers, des Schiefersteins u. s. f. sehr wohl zur Versinnlichung derjenigen Vorstellung, die wir von der Ebene haben.

Man bemerke, daß alle fernere Constructionen, welche wir mit Linien, Winkeln u. s. f. vornehmen, jedesmal eine solche geometrische Ebene voraussetzen, in welcher sie ausgeführt werden. Alle diese Linien, Winkel u. s. f. werden sich in und nicht auf dieser Ebene befinden, denn weder die blos gedachte Linie, noch die blos gedachte Ebene hat eine Dicke, da jener nur eine Länge, dieser nur eine Länge und Breite zukömmt. Daher sind alle Linien, welche z. B. mit Kreide auf der Tafel, oder mit Bleystift auf dem Papiere gezogen werden, nur Sinnbilder, um Dasjenige zur äussern Anschauung des Auges zu bringen, was der innern Anschauung des Geistes mit größter Klarheit gegeben ist.

Mitten. Wenn fg eine gerade in der Ebene befindliche Linie und f ihr einer Endpunct ist, so kann man sich aus diesem Puncte eine zweyte gerade fd denken, welche eine solche Lage hat, daß sie mit der Linie fg nicht eine einzige gerade bildet. Das, was hierdurch entsteht, nennt man den ebenen geradlinigen Winkel. Seine Größe besteht nicht in der Länge seiner Schenkel, sondern in der Größe seiner Oeffnung.

Anmerkung. Was man hier Größe der Oeffnung nennt, wird vorzüglich durch die Anschauung klar, wenn des Winkels dfg Schenkel fd

und fg charnierartig um den Punct f gedreht werden, wodurch ihre gegenseitige Neigung bald größer, bald kleiner wird.

Wenn die Linie fg wie vorhin in der Ebene des Papiers, der Punct d hingegen oberhalb dieser Ebene (z. B. einige Zolle hoch in der Luft) sich befindet, so wird, wenn man sich von f nach d eine gerade Linie denkt, auch dieser zweyte Winkel gfd in einer und der nämlichen Ebene liegen. Denn, wenn sich die Ebene des Papiers um die unbewegliche Linie fg rings herumdreht, so muß sie den Punct d einmal erreichen. Wo dieses geschieht, da liegt der Punct d in ihr, und folglich auch die ganze gerade Linie fd nebst dem Winkel gfd.

Anmerkung. Dieses Drehen der Ebene muß dem Schüler durch die sinnliche Anschauung deutlich gemacht werden, wie auch sehr leicht geschehen kann.

Jede drey Puncte, welche man sich, wo immer im Raume (nur nicht in gerader Linie liegend) denken mag, befinden sich daher alle in einerley Ebene. Daher werden jede zwey gerade Linien, welche aus einem gemeinschaftlichen Endpuncte nach was immer für Richtungen sich erstrecken, einen ebenen Winkel bilden, wenn diese Richtungen nur weder vollkommen einstimmig, noch gerade entgegengesetzt sind.

Anmerkung. Hieraus erklärt es sich, warum dreyfüßige Tische, z. B. der Meßtisch u. dgl. auch auf unebenem Boden fest stehen, da die Endpuncte dieser Füße immer in einerley Ebene liegen, welche sie sich hier immer selbst bilden.

Der ebene geradlinige Winkel ist daher die Neigung zweyer geraden Linien, welche mit ihren Endpuncten so zusammentreffen, daß sie nicht eine einzige gerade Linie bilden. Werden in der nämlichen Ebene aus einem Puncte zwey krumme Linien gezogen, welche keinen andern Punct mehr gemein haben, so entsteht der ebene krummlinige Winkel. Ist der eine Schenkel eine gerade, der andere eine krumme Linie, so heißt der Winkel ein ebener gemischtliniger. Wenn wir in der Folge vom Winkel überhaupt sprechen, so verstehen wir immer den ebenen geradlinigen darunter, weil dieser für die eigentliche Geometrie von der größten Wichtigkeit ist.

Wenn die beyden Winkel hbc und dfg gegeben sind, so kann man den Schenkel fg dergestalt in den Schenkel bc legen, daß f in b und fg längs bc liegt. Fällt nun hier der andere Schenkel fd in den Schenkel bh, so werden sich die Winkel gfd und cbh decken, und sind daher gleiche Winkel. Da aber die Größe eines Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel, sondern von ihrer Neigung oder von der Oeffnung des Winkels abhängt, so kömmt nichts darauf an, ob der Schenkel fg den Schenkel bc und der Schenkel fd den Schenkel bh der ganzen Länge nach decken wird oder nicht. Denn der Winkel mbn ist offenbar der nämliche, als der Winkel hbc.

Hieraus folgt der wichtige Satz: Gleiche Winkel können jedesmal so ineinander gelegt werden, daß sie sich decken.

Umgekehrt: Wenn zwey Winkel einander decken, so müssen sie gleich seyn.

Unten. Wenn man den Winkel dfg dergestalt über bc sich denkt, daß f in b und fg längs bc liegt, und der andere Schenkel fd nicht in bh fällt, so wird er entweder einwärts, nach ba, oder auswärts nach bm fallen. Im ersten Falle muß, da der Winkel abc nur ein Theil vom Winkel hbc ist, auch der Winkel dfg, welcher dem Winkel hbc gleich ist, nur ein Theil des Winkels hbc seyn. Daher ist Winkel dfg kleiner als Winkel hbc, und der Winkel hba ist ihr Unterschied.

Im zweyten Falle ist Winkel mbc größer als Winkel hbc, folglich muß auch Winkel dfg nunmehr größer als Winkel hbc seyn. Der Winkel mbh ist hier wieder ihr Unterschied.

Aus diesem Ineinanderlegen der Winkel ist es einleuchtend, wie man den Unterschied zweyer ungleichen Winkel bestimmen kann. Denn wenn beyde mit ihren Scheiteln und dem einen ihrer zwey Schenkel ineinanderliegen, und nun die beyden andern Schenkel nicht ineinanderfallen, so sind die Winkel ungleich, und man erkennt sogleich den größern, den kleinern, und den Unterschied zwischen beyden.

Tafel 69.

Entstehung und Bezeichnung der Theilwinkel, welche durch Linien aus dem Scheitel und zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels entstehen. Summirung mehrerer Winkel. — Entstehung und Erklärung der Nebenwinkel.

Oben. Wenn qrt ein beliebiger Winkel ist, und man denkt sich aus seinem Scheitelpuncte r die geraden Linien rp und rs zwischen seinen Schenkeln rq und rt gezogen, so wird hierdurch der ganze Winkel qrt in mehrere kleinere Winkel, als dessen Theile, eingetheilt. Diese Theilwinkel sind: qrp, prs, srt. Zusammen bilden sie wieder den Winkel qrt. Jeder dieser drey genannten Winkel ist daher kleiner, als der ganze. Ausser diesen drey Winkeln entstehen hier noch zwey andere, nämlich: W. qrs und W. prt, deren jeder aus zwey nebeneinanderliegenden Theilwinkeln gebildet wird, und kleiner als der ganze Winkel qrt ist.

Es ist eine zweckmäßige Uebung, den gegebenen Winkel in eine noch größere Zahl von kleinern zu theilen, und sodann diese sämmtliche Theilwinkel, nebst den aus ihren Verbindungen entspringenden größern Winkeln gehörig zu benennen, und zur klaren Anschauung zu bringen. Das Gesetz, welches die Anzahl der hierdurch entstehenden sämmtlichen Winkel bestimmt, ist bereits Oben (zweyter Cursus, Tafel 49) angeführt worden.

Wie man mehrere gegebene Winkel, z. B. abc, dfh, mgn zusammen in einen einzigen verwandeln, oder summiren kann, wird nun sehr einleuchtend

seyn. Wenn nämlich an den Winkel srt, welcher dem W. abc gleich ist, der zweyte prs, welcher dfh und der dritte qrp, welcher mgn gleich ist, gehörig angelegt wird, so muß der W. qrt den drey gegebenen Winkeln b, f und g zusammengenommen gleich seyn. Die Art und Weise, wie man einen gegebenen Winkel an einen gegebenen Schenkel legen kann, gehört nicht in die Anschauungslehre, sondern in das Gebiet der Geometrie.

Mitten. Die hier befindlichen Winkel acb und acd sind Nebenwinkel; jener ist ein stumpfer, dieser ein spitzer Winkel. Beydes ist aus dem I. und II. Cursus bekannt.

Hier soll die Entstehung und der Begriff dieser Winkel klar werden.

Wenn man in der geraden Linie bd einen beliebigen Punct c annimmt, und aus demselben die gerade ca zieht, welche weder mit cd noch mit cb zusammenfällt, so entstehen zwey Winkel, welche man Nebenwinkel heißt.

Zwey Nebenwinkel sind daher jene zwey Winkel, welche einen Schenkel mit einander gemein haben, und deren nicht gemeinschaftliche Schenkel in einer geraden Linie liegen.

Unten. Wenn man sich aus dem beliebigen Puncte g der geraden Linie ad zwey gerade gb und gc dergestalt denkt, daß sie auf einerley Seite von ihr liegen und weder unter sich, noch mit gd oder ga zusammenfallen, so entstehen an dem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte g fünf Winkel, nämlich:

agb, agc, bgc, bgd und cgd. Die drey an der geraden ad nebeneinander liegenden Winkel o, x und u heißen auch Nebenwinkel. Man erkennt sie daran, daß alle drey einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben, und daß die beyden äussersten Schenkel eine einzige gerade Linie bilden.

Wie auf solche Weise vier, fünf, sechs u. s. f. Nebenwinkel entstehen können, ist sehr leicht zu übersehen; ihre Bildung, Anschauung und Benennung aber eine lehrreiche Uebung.

Tafel 70.

Nebeneinanderliegende Winkel sind nicht immer Nebenwinkel. Erklärung des rechten Winkels, des Lothes, des spitzen und stumpfen Winkels und der schiefen Winkel. — Unterschied zwischen Sach- und Wort-Erklärungen. — Entstehung und Begriff der Scheitelwinkel.

Oben. Die Winkel acb und acd sind zwar an der geraden Linie ac, als ihrem gemeinschaftlichen Schenkel, nebeneinanderliegende, jedoch keine Nebenwinkel, da die nicht gemeinschaftlichen Schenkel cb und cd keine gerade Linie, sondern eine Winkellinie bcd bilden.

Mitten. Wenn aus dem Puncte n der geraden cd die Linie na dergestalt gezogen ist, daß die beyden Nebenwinkel and und anc einander gleich sind, so nennt man jeden von diesen zwey gleichen Nebenwinkeln einen rechten Winkel, und die Linie na ein Loth auf cd; so wie auch dn und cn Lothe auf na sind.

Die Art, wie man die gerade na ziehen müsse, daß sie mit der cd zwey unter sich gleiche Nebenwinkel bildet, ist hier noch unbekannt. Aber Niemand wird die Möglichkeit in Zweifel ziehen, daß die gerade na auf solche Weise gezogen werden könne. Dies ist in diesem Cursus der erste Fall, daß wir etwas (den rechten Winkel und das Loth) erklären, ohne die bestimmte Methode anzugeben, wodurch man die wirkliche Entstehung der erklärten Sache überzeugend erkennt.

Solche Erklärungen, welche nur angeben, was man sich unter einem gewissen Worte zu denken habe, ohne dabey zu zeigen, wie die zu erklärende Sache entsteht oder hervorgebracht wird, nennt man Worterklärungen. Jene Erklärungen aber, wodurch man sogleich die Entstehung der zu erklärenden Sache einsieht, heißen: Sacherklärungen. Die bisherigen Erklärungen von dem Winkel überhaupt und von Nebenwinkeln waren Sacherklärungen. Die jetzige Erklärung des rechten Winkels und des Lothes ist aber nur eine Worterklärung. Denn die Entstehung der Nebenwinkel ist Jedem aus Obigem von selbst einleuchtend, nicht so aber die wirkliche Erzeugung des rechten Winkels.

Diese wirkliche Construction des rechten Winkels und des Lothes (so einfach dieselbe auch scheinen mag) gehört nicht in die vorbereitende Anschauungslehre, sondern selbst in das Gebiet der Geometrie. Dort wird diese Worterklärung zu einer strengen Sacherklärung werden.

Auch bemerke man, daß alle hier noch folgende Worterklärungen erst dann für die streng geometrische Wissenschaft brauchbar seyn können, wenn solche, durch unläugbare Sätze der Geometrie, in Sacherklärungen verwandelt werden.

Wenn zwischen den Schenkeln des rechten Winkels anc ein Punct b willkührlich angenommmen und die gerade bn gezogen wird, so ist W. bnc kleiner als W. anc, d. h. W. bnc ist kleiner als der rechte Winkel.

Ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer Winkel.

Da der Winkel bnd aus dem rechten and und dem spitzen bna besteht, so ist W. bnd größer als der rechte Winkel.

Ein Winkel, welcher größer als der rechte ist, heißt ein stumpfer Winkel.

Spitze und stumpfe Winkel nennt man mit einem gemeinschaftlichen Worte schiefe Winkel und der eine Schenkel eines spitzen oder eines stumpfen Winkels heißt, in Rücksicht seiner Lage gegen den andern Schenkel, eine schiefe Linie. Eine gerade Linie steht daher schief auf einer andern, wenn sie mit dieser einen spitzen oder einen stumpfen Winkel bildet.

Nun sind folgende Sätze sehr einleuchtend:

1) Alle rechte Winkel sind einander gleich.
2) Jeder rechte Winkel ist größer als jeder spitze, und jeder spitze Winkel ist kleiner als der rechte Winkel.
3) Jeder stumpfe Winkel ist größer als der rechte, jeder rechte Winkel aber ist kleiner als jeder stumpfer.

4) Jeder spitzer Winkel ist kleiner als der stumpfe und jeder stumpfe Winkel größer als der spitze.

5) Nicht alle spitze Winkel sind einander gleich; eben so nicht alle stumpfe Winkel.

6) Es gibt sowohl gleiche, als größere und kleinere spitze und stumpfe Winkel.

Unten. Wenn man in der geraden Linie ab einen willkührlichen Punct n annimmt, und durch denselben eine gerade Linie dnc legt, welche mit der geraden ab nicht in eine einzige zusammenfällt, so entstehen die Scheitelwinkel anc, dnb und and, cnb.

Scheitelwinkel sind daher jene, welche entstehen, wenn zwey gerade Linien sich in einem ihrer Zwischenpuncte durchschneiden, wodurch rings um diesen Durchschnittspunct vier Winkel gebildet werden, wovon die beyden sich entgegenliegenden die Scheitelwinkel sind.

Die Entstehung der Scheitelwinkel läßt sich auch so einsehen: Wenn cnb ein gegebener spitzer Winkel ist, und man verlängert dessen Schenkel bn über den Scheitel n nach a, so entsteht ein stumpfer Winkel cna, als Nebenwinkel des spitzen cnb. Wird nun auch der andere Schenkel cn über n nach d verlängert, so entstehen hierdurch noch zwey Winkel auf der andern Seite von ab, nämlich der stumpfe bnd und der spitze and. Von diesen vier Winkeln ist nun cnb Scheitelwinkel von and, und cna Scheitelwinkel von dnb. Der Scheitelwinkel eines gegebenen Winkels entsteht also auch, wenn man seine beyde Schenkel über den Scheitel rückwärts verlängert.

Wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, so ist auch sein Scheitelwinkel ein rechter, und es entstehen hier rings um den Scheitelpunct vier rechte Winkel.

Diese Erklärungen von den Scheitelwinkeln sind Sacherklärungen, weil man durch sie erkennt, auf welche Weise diese Winkel gebildet werden.

Tafel 71.

Entstehung mehrerer Paare von Scheitelwinkeln. Bedingung ihrer Entstehung. — Gleichlaufende oder parallele Linien.

Oben. Wenn die drey geraden Linien ab, fd und mn sich in einem gemeinschaftlichen Puncte c durchschneiden, so entstehen um diesen Durchschnittspunct c sechs Winkel, wovon drey Paare Scheitelwinkel sind. Zu acm gehört ncb; zu acd gehört bcf, und zu dcn gehört fcm als Scheitelwinkel.

Wie nun aus dem Durchschnitte von mehr als drey geraden Linien noch mehrere Scheitelwinkel entstehen können, ist von selbst klar.

Mitten. Obgleich hier aus dem Puncte c die Linien ca, cb, cd, cm und cn nach verschiedenen Richtungen ausgehen, und die fünf Winkel acb, bcd, dcm, mcn und nca bilden, so haben dennoch keine Scheitelwinkel statt. Denn keine der Linien ac, bc, dc, mc und nc wird, wenn man sie rückwärts über c verlängert, in eine der schon vorhandenen eintreffen, um mit ihr eine einzige gerade zu bilden. Zur Bildung der Scheitelwinkel gehören also durchaus mehrere gerade, sich in einem einzigen Puncte schneidende Linien.

Unten. Wenn zwey gerade, in einerley Ebene liegende Linien ab und cd eine solche Lage haben, daß, wenn man sie beyderseits sowohl über b und d, als auch über a und c ohne Ende verlängert, dieselbe weder auf der einen noch auf der andern Seite zusammentreffen, so werden sie gleichlaufende oder parallele Linien genennt. Ihr Gleichlaufen oder Parallelseyn besteht also in dem nie erfolgenden Durchschnitte, man mag sie zur Rechten und Linken noch so weit verlängern.

Diese Erklärung von Parallellinien ist eine bloße Worterklärung. Denn die Frage, ob solche Linien wirklich möglich sind, und wie sie erhalten werden können, muß erst noch beantwortet werden. Diese Beantwortung gehört aber nicht hierher, sondern in die eigentliche Geometrie.

Tafel 72.

Begriff der zusammen- und auseinanderlaufenden Linien. Erklärung der verschiedenen Winkel an Parallellinien, welche von einer dritten geraden geschnitten werden. Entstehung und Begriff des geradlinigen Dreyecks und seiner Arten.

Oben. Zwey gerade Linien in einerley Ebene, wie ab und cd, welche einmal zusammentreffen werden, wenn man sie über b und d gehörig verlängert, heißen zusammenlaufende oder convergirende Linien.

Zwey gerade Linien, wie ba und dc, welche bey ihren Verlängerungen über a und c immer weiter und weiter auseinanderlaufen, nennt man auseinanderlaufende oder divergirende Linien.

Wenn zwey gerade Linien auf der einen Seite convergirende sind, so müssen sie nach der entgegengesetzten divergirende seyn, und umgekehrt.

Auch diese Linien werden erst in der Geometrie ihre wissenschaftliche Bestimmungen erhalten.

Mitten. Wenn die zwey Parallellinien ab und cd von der dritten geraden mn durchschnitten werden, so entstehen (nach dem zweyten Cursus, Tafel 50 Unten) bekanntlich acht Winkel, welche besondere Namen haben.

Die beyden innern Winkel an Parallellinien heißen jene Winkel, welche auf einerley Seite der schneidenden Linie und zwischen den beyden Parallelen liegen. W. u und W. y; W. o und W. x sind diese innere Winkel.

Jedem einzelnen dieser innern Winkel gehört ein äusserer zu, welcher mit ihm zwar auf einerley Seite der schneidenden Linie, aber ausserhalb der Parallellinien liegt, ohne jedoch sein Nebenwinkel zu seyn. Von W. y ist W. s; von W. u ist W. v; von W. x ist W. r; von W. o ist W. z, der äussere Winkel.

Wechselwinkel an Parallellinien sind jene, welche auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Linie und zwischen den Parallellinien liegen, ohne daß einer der Nebenwinkel des andern ist. Hier heißen die Winkel o und y; ferner die Winkel x und u Wechselwinkel.

Unten. Wenn man in jedem der beyden Schenkel ba und bc des Winkels abc einen willkührlichen

Punct d und n annimmt, und diese Puncte durch eine gerade Linie dn verbindet, so wird die Oeffnung des Winkels geschlossen und es entsteht hierdurch das geradlinige Dreyeck dbn.

Hieraus folgt, daß das Dreyeck eine ringsumher geschlossene, in bestimmten Grenzen enthaltene, Ebene sey.

Eine von geraden Linien durchaus eingeschlossene Ebene nennt man eine geradlinige Figur.

Das geradlinige Dreyeck ist folglich eine Figur, welche entsteht, wenn die Oeffnung eines geradlinigen Winkels durch eine gerade Linie zugeschlossen wird.

Diese Erklärung des Dreyecks ist eine Sacherklärung.

Bey jedem Dreyecke kann man betrachten:

1) seine drey Seiten, d. h. die drey Linien, die es bilden;
2) seine drey Winkel, welche aus dem Durchschnitte jeder zwey dieser drey Seiten entstehen, und
3) den Flächenraum, welchen das Dreyeck enthält.

Das geradlinige Dreyeck ist daher auch eine Figur, welche von drey geraden Linien eingeschlossen wird

Die Entstehung des geradlinigen Dreyecks läßt sich noch auf folgende zwey Arten einsehen:

1) Wenn man sich drey willkührliche Puncte (b, d und n) die nicht in gerader Linie liegen, denkt und je zwey durch eine gerade Linie (bd, dn und nb) verbindet, so entsteht ebenfalls ein Dreyeck (bdn).

2) Wenn sich der Endpunct b der geraden Linie bc von b nach d geradlinig bewegt, in d aber seine Richtung plötzlich ändert und nun bis n geradlinig fortschreitet, so wird ebenfalls das Dreyeck bdn erzeugt.

Das geradlinige Dreyeck hat drey gerade Linien, das krummlinige drey krumme Linien und das gemischtlinige theils gerade, theils krumme Linien (entweder zwey gerade und eine krumme; oder zwey krumme Linien und eine gerade) zu seinen Seiten.

Aus dem Begriffe der Figur, als eines allseitig-geschlossenen Raumes folgt, daß weder der ebene Winkel, noch die Parallellinien, noch überhaupt irgend zwey gerade Linien eine Figur bilden können. Aber eine gerade und eine krumme Linie, oder auch zwey krumme Linien, sogar eine einzige krumme Linie, können Figuren bilden, wie man dieses leicht durch Zeichnungen erläutern kann.

Eine Figur heißt krummlinig, wenn sie nur von krummen Linien, vermischtlinig, wenn sie theils von geraden, theils von krummen Linien eingeschlossen ist.

Ein gleichseitiges Dreyeck ist ein Dreyeck, welches drey gleiche Seiten hat.

Ein gleichschenkeliges Dreyeck heißt dasjenige, worin zwey gleiche Seiten sind.

Ein ungleichseitiges Dreyeck wird jenes Dreyeck genennt, welches drey ungleiche Seiten hat.

Diese drey Erklärungen sind Worterklärungs-

en. Die mittlere kann aber hier schon dadurch zur Sacherklärung werden, daß man aus dem Scheitel irgend eines Winkels auf seinen beyden Schenkeln zwey gleiche Stücke annimmt, und ihre Endpuncte durch eine gerade Linie verbindet.

Die Grundlinie im gleichschenkeligen Dreyecke heißt jene Seite, welche den beyden andern ungleich ist. Die beyden gleichen Seiten nennt man die gleichen Schenkel. Die Grundlinie kann größer oder kleiner, als jeder der beyden gleichen Schenkel seyn.

Die beyden Winkel, welche die Grundlinie mit jedem der gleichen Schenkeln bildet, heißen Winkel an der Grundlinie; und der Scheitel des der Grundlinie gegenüberliegenden Winkels wird die Spitze genennt.

Ein rechtwinkeliges heißt jenes Dreyeck, welches einen rechten und zwey spitze Winkel enthält. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nennt man die Hypotenuse; die beyden den rechten Winkel bildenden Seiten, die Catheten.

Ein stumpfwinkeliges Dreyeck ist ein Dreyeck, worin sich ein stumpfer Winkel und zwey spitze befinden.

Ein spitzwinkeliges Dreyeck, heißt jenes Dreyeck, welches drey spitze Winkel enthält. Diese drey Erklärungen sind gleichfalls nur Worterklärungen. Die Untersuchung, warum ein Dreyeck nur einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthalten könne, übersteigt die Grenzen der Anschauungslehre und gehört in die Geometrie.

Vom gleichschenkeligen Dreyecke ist noch zu bemer-

ken, daß es sowohl gleichschenkelig-rechtwinkelig, als gleichschenkelig-stumpfwinkelig und gleichschenkelig-spitzwinkelig seyn kann, je nachdem dessen Winkel an der Spitze ein rechter, stumpfer oder spitzer Winkel ist. Schickliche Zeichnungen können dieses erläutern.

Ueberhaupt folgt hieraus, daß man die Dreyecke sowohl nach der Art ihrer Seiten, als nach der Größe ihrer Seiten und endlich auch nach der Größe ihrer Winkel eintheilen kann. Wie vielerley sie in jeder dieser Rücksichten sind, ist eben dargelegt worden.

Tafel 73.

Grundlinie und Höhe des Dreyecks. Dreyecke von einerley Grundlinie und verschiedener Höhe, und umgekehrt.

Oben. Man kann jede der drey Seiten eines Dreyecks abc als seine Grundlinie betrachten. Diese Benennung bezieht sich auf die Höhe des Dreyecks, worunter man ein Loth von der, der Grundlinie gegenüberliegenden Spitze, auf diese Grundlinie versteht. Nimmt man bc als Grundlinie, so ist das Loth ad die Höhe des Dreyecks.

Wenn man in dem rechtwinkeligen Dreyecke die eine Cathete als Grundlinie nimmt, so ist die andere die Höhe, und umgekehrt. Wird die Hypotenuse zur Grundlinie genommen, so ist das Loth, aus dem Scheitel des rechten Winkels auf diese Hypotenuse, des Dreyecks Höhe.

Mitten. Dreyecke heißen: von einerley Höhe, wenn die Lothe, welche diese Höhen bestimmen, einander gleich sind. So sind die Dreyecke mgh und ndc von einerley Höhe, wenn die Lothe mp und nq gleich sind.

Unten. Dreyecke heißen von einerley Grundlinie, wenn jene Seiten in ihnen, welche man als Grundlinien annimmt, einander gleich sind. In den Dreyecken abn und qmd sind die Grundlinien bn und md gleich, die Höhen ac und qp aber ungleich. Daher heißen dieselbe: Dreyecke von einerley Grundlinie. Sie sind aber von verschiedener Höhe, weil die Linien ac und qp ungleich sind.

Tafel 74.

Dreyecke von verschiedener Grundlinie und Höhe. — Begriff der congruenten Dreyecke. Congruente Dreyecke decken sich, und umgekehrt. Begriff der ähnlichen Dreyecke.

Oben. Wenn in zwey Dreyecken Grundlinien und Höhen ungleich sind, so werden sie Dreyecke von verschiedener Grundlinie und Höhe genennt. Zum Beyspiele dienen die Dreyecke abc und mdh, deren Grundlinien bc und dh, gleichwie auch die Höhen ad und mn ungleich sind.

Mitten. Zwey Dreyecke heißen congruent oder übereinstimmend, wenn man das eine dergestalt in das andere legen kann, daß alle Seiten und Winkel sich gegenseitig einander decken.

Wenn man z. B. das Dreyeck abc so in das Dreyeck mdn legen kann, daß die Seite bc die Seite dn; der Winkel b den Winkel d; der Winkel c den Winkel n; die Seite ba die Seite dm; der Winkel a den Winkel m, und die Seite ac die Seite mn deckt, so sind beyde Dreyecke congruent oder übereinstimmend.

Congruente Dreyecke sind in nichts verschieden, und bilden daher nur ein und das nämliche Dreyeck.

Congruente Dreyecke können so ineinandergelegt werden, daß sie sich decken.

Dreyecke, die sich decken, sind congruent.

In congruenten Dreyecken sind die sich deckenden Seiten und Winkel einander gleich.

Wenn man weiß, daß zwey Dreyecke congruent sind, so kann man von den bekannten gleichen Seiten auf die Gleichheit der ihnen entgegenstehenden Winkel; und umgekehrt, von den gleichen Winkeln, auf die Gleichheit der ihnen gegenüberliegenden Seiten schliesen. Gesetzt die Dreyecke abc und mdn wären congruent und man wüßte, daß die Seite ab der Seite md gleich ist, und wollte nun im Dreyecke mdn den Winkel finden, welcher dem Winkel c des Dreyecks abc gleich ist, so würde dies der Winkel n seyn; denn dieser Winkel n liegt gegen md über, so wie der Winkel c der ihr gleichen Seite ab gegenüberliegt. Auf eben diese Art könnte man aus der Gleichheit der Winkel a und m auf die Gleichheit der ihnen gegenüberstehenden Seiten bc und dn schliesen.

Allgemein ausgesprochen heißt dieses so: In congruenten Dreyecken stehen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und den gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Die Congruenz der Dreyecke ist folglich die gänzliche Uebereinstimmung dieser Dreyecke in ihren Seiten, Winkeln und Flächenräumen. Da man sich ein gegebenes Dreyeck noch einmal (ihm zur Seite stehend) denken kann, so wird diese Erklärung von der Congruenz der Dreyecke eine Sacherklärung seyn. Die wirkliche Construction der congruenten Dreyecke gehört aber in die Geometrie.

Unten. Dreyecke heißen ähnlich, wenn jeder Winkel des einen, einem ihm der Lage nach entsprechenden Winkel im andern gleich ist, und die Seiten, welche diese Winkel bilden, gegenseitig proportional sind. Dies Proportionalseyn besteht aber darin, daß die drey Seiten des einen Dreyecks einzeln genommen z. B. zweymal, dreymal, viermal u. s. f. so groß oder so klein sind, als die ihnen der Lage nach entsprechenden einzelnen Seiten im andern Dreyecke.

Wenn in den Dreyecken acb und dfg die Winkel a und d; c und f; b und g gleich sind, auch ac von df; cb von fg, und ba von gd z. B. das Doppelte ist, so sind diese Dreyecke ähnlich.

Diese Erklärung ist eine Worterklärung. Die Sache selbst muß in der Geometrie streng begründet werden.

Tafel 75.

Erklärung des Begriffs der Gleichheit mehrerer Flächen. Die Congruenz, die Aehnlichkeit und die Gleichheit. — Das in den Kreis beschriebene Dreyeck; der um das Dreyeck beschriebene Kreis.

Oben. Das Dreyeck bac sey gleichschenkelig, und ab so groß wie ac. Nimmt man in bc einen beliebigen Punct d und zieht die gerade ad, so zerfällt dieses Dreyeck in zwey andere adb und adc. Denkt man sich nun das Dreyeck adb bleibe unbeweglich, das Dreyeck adc drehe sich aber um den festen Punct a, von d gegen f so lange, bis ac in ab fällt, so hat nun das Dreyeck adc die Lage afb. Hier ist nun klar, daß das Viereck afbda, weil es gleich dem Dreyecke abc aus zwey vollkommen übereinstimmenden Theilen besteht, diesem Dreyecke selbst an Größe gleich seyn muß. Das Viereck afbda hat daher mit dem Dreyecke abc einerley Flächenraum, obschon das Viereck, gegen das Dreyeck betrachtet, eine ganz andere Gestalt hat.

Die Gleichheit zweyer Flächen besteht darin, daß beyde einerley Größe haben und in ihrer Gestalt verschieden sind. Diese Erklärung der Gleichheit ist, bey der hier nachgewiesenen Entstehung solcher Flächen, eine Sacherklärung.

Vergleicht man die Congruenz, die Aehnlichkeit und die Gleichheit miteinander, so kann man sagen:

Congruenz ist die Uebereinstimmung in Gestalt und in Größe.

Aehnlichkeit ist die Uebereinstimmung in der Gestalt bey verschiedener Größe.

Gleichheit ist die Uebereinstimmung in der Größe bey verschiedener Gestalt.

Anmerkung. Zur Erläuterung dieser Begriffe bemerke der Lehrer: Alle Kreise von verschiedenen Halbmessern sind ähnlich. Eben so alle Quadrate von verschiedenen Seiten. Ein Viereck kann aber einem Dreyecke gleich seyn. Kreise mit gleichen Halbmessern beschrieben, oder Quadrate von gleichen Seiten, sind congruent.

Diese drey Begriffe werden auch bey andern Figuren betrachtet werden, und sind dem strengen Vortrage der Geometrie von größter Wichtigkeit.

Mitten. Wenn man sich vorstellt, das rechtwinkelige Dreyeck acd werde um die unverrückbare Cathete cd so herumgedreht, daß a in n fällt, so entstehet der Flächenraum acnda. Drehte sich hingegen das Dreyeck acd um die feste Cathete ac, so; daß d in b fällt, so entstände der Flächenraum abcda. Beyde Flächenräume müssen gleich seyn, da jeder das Doppelte von dem Dreyecke acd ist. Diese Flächenräume stimmen daher in der Größe, aber (wie man sich leicht durch die Anschauung überzeugt) nicht in der Gestalt überein.

Unten. Ein Dreyeck heißt in einen Kreis beschrieben, wenn sich seine drey Winkelpuncte in der Kreislinie befinden. Dies gilt vom Dreyecke mnd in Rücksicht der Kreislinie nadbmfn.

Ein Kreis heißt um ein Dreyeck beschrieben, wenn die Kreislinie durch dessen drey Winkelpuncte geht. Der Kreis nadbnf ist um das Dreyeck nmd beschrieben.

Tafel 76.

Der in das Dreyeck beschriebene Kreis; das um den Kreis beschriebene Dreyeck. Der Aussenwinkel am Dreyeck und seine innere entgegengesetzte. — Begriff der Vierecke und ihrer Arten. Ihr Gemeinsames und Unterscheidendes. Parallelogramm. Diagonalen im Vierecke. Grundlinie und Höhe.

Oben. Ein Kreis heißt in das Dreyeck beschrieben, wenn die Kreislinie jede der Dreyecksseiten in einem Puncte berührt. Der Kreis hfgh ist in das Dreyeck abd beschrieben, weil die Kreislinie in h, f und g die Dreyecksseiten ba, ad und db berühret.

Das Dreyeck heißt um den Kreis beschrieben, wenn jede seine drey Seiten einen Punct mit der Kreislinie gemein hat. Das Dreyeck abd ist um die Kreislinie hfg beschrieben, weil die Puncte h, f und g den Dreyecksseiten sowohl, als auch der Kreislinie gemein sind. Diese drey letzten Erklärungen sind wieder Worterklärungen, wie nach dem Bisherigen kaum mehr bemerkt zu werden braucht. Die erste Erklärung aber ist eine Sacherklärung, weil man die Construction des in den Kreis zu beschreibenden Dreyecks leicht nachweisen kann.

Zum Schlusse dieser Betrachtung der Dreyecke bemerke man noch folgende Erklärungen: Der Aussenwinkel heißt derjenige Winkel des Dreyecks, welcher von einer seiner verlängerten Seiten und der an dieser anliegenden Seite gebildet wird. Er muß daher immer ausserhalb des Dreyecks liegen.

Die beyden innern entgegengesetzten heißen jene beyde Winkel im Dreyecke, wovon keiner ein Nebenwinkel des Aussenwinkels ist.

Mitten. Es sey acb ein gegebenes Dreyeck. Nimmt man nun innerhalb der Oeffnung des Winkels acb (dessen Schenkel ca über a und cb über b willkührlich verlängert gedacht wird) jedoch ausserhalb des Dreyecks cab einen beliebigen Punct d an, und zieht die geraden Linien ad und bd, so entsteht hieraus eine von vier geraden Linien ac, cb, bd, da eingeschlossene Ebene.

Eine Figur, welche von vier geraden Linien eingeschlossen wird, heißt ein Viereck.

Würde ein Punct g innerhalb des gegebenen Dreyecks abc angenommen, und würden aus ihm die geraden Linien ga und gb gezogen, so entstände ebenfalls ein Viereck acbga, welches bey g einen einwärtsgehenden Winkel hat.

Diese Erklärung des Vierecks ist eine Sacherklärung.

Bey jedem Vierecke kann man Rücksicht nehmen:

1) auf seine vier Seiten d. h. auf die Linien, die es bilden;
2) auf die vier Winkel, welche von je zwey dieser Seiten gebildet werden;
3) auf die Fläche, welche das Viereck enthält.

Da das Viereck entweder vier gerade Linien, oder vier krumme; oder theils gerade, theils krumme Linien enthalten kann, so versteht sich von selbst, was ein geradliniges, ein krummliniges und ein gemischtliniges Viereck ist.

Anmerkung. Es ist zweckmäßig, wenn der Lehrer hier noch andere Entstehungsarten des Vierecks beybringt; z. B. durch Beschreibung eines Dreyecks über eine gegebene gerade Linie nach ihrer einen, und dann auch nach ihrer andern Seite hin; oder durch Zusammensetzen zweyer ungleichen Dreyecke, welche eine gemeinschaftliche Seite haben u. s. w.

Die Vierecke sind von sechserley Art; entweder Quadrate, oder Rauten, oder Rechtecke, oder Rhomboiden, oder Paralleltrapeze, oder Trapeze schlechthin (gemeine Trapeze).

Das Quadrat ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat.

Die Raute ist ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und zwey Paare gleicher Winkel, welche theils spitze, theils stumpfe sind, enthält.

Das Rechteck ist ein Viereck, welches zwey Paare gleicher Seiten und vier rechte Winkel hat.

Die Rhomboide ist ein Viereck, welches zwey Paare gleicher Seiten, und zwey Paare gleicher Winkel, theils spitze, theils stumpfe, enthält.

Das Paralleltrapez ist ein Viereck, worin nur zwey gegenüberliegende Seiten gleichlaufend oder parallel, die beyden übrigen aber es nicht sind.

Das Trapez ist ein Viereck, worin die gegenüberliegenden Seiten theils zusammenlaufende, theils auseinanderlaufende sind.

Da die Gestalt dieser Vierecke aus dem Vorhergegangenen bekannt genug ist, so erspart man sich hier wiederholte Zeichnungen derselben.

Es ist klar, daß sämmtliche Erklärungen dieser Vierecke blose Worterklärungen sind, welche erst durch den Vortrag der Geometrie zur Vollendung gebracht werden.

Das Quadrat und die Raute stimmen darin überein, daß beyde Vierecke vier gleiche Seite haben. Sie unterscheiden sich aber dadurch von einander, daß das Quadrat vier rechte Winkel, die Raute dagegen zwey stumpfe und zwey spitze Winkel hat, wovon die beyden gegenüberliegenden einander gleich sind.

Das Quadrat hat mit dem Rechtecke die vier rechten Winkel gemein; aber beyde unterscheiden sich in den Seiten, da das Quadrat vier gleiche Seiten, das Rechteck nur gegenüberliegende gleiche Seiten hat.

Das Quadrat hat mit der Rhomboide gegenüberliegende gleiche Seiten und gegenüberliegende gleiche Winkel gemein. Sie unterscheiden sich aber darin, daß in dem Quadrate vier gleiche Seiten und vier gleiche Winkel; in der Rhomboide aber nur gegenüberliegende gleiche Seiten und gegenüberliegende gleiche Winkel sind.

Die Raute und das Rechteck stimmen in den gegenüberliegenden gleichen Seiten, und in den gegenüberliegenden gleichen Winkeln überein; sind aber darin verschieden, daß die Raute vier gleiche Seiten und gegenüberliegende gleiche Winkel, das Rechteck dagegen vier gleiche Winkel und gegenüberliegende gleiche Seiten hat.

Die Raute hat mit der Rhomboide gegen-

überliegende gleiche, theils spitze, theils stumpfe Winkel gemein; unterscheidet sich aber dadurch von ihr, daß jene vier gleiche, diese aber nur die gegenüberliegenden Seiten gleich hat.

Das Rechteck und die Rhomboide kommen in den gegenüberliegenden gleichen Seiten und in den gegenüberliegend gleichen Winkeln überein; unterscheiden sich aber in den Winkeln, da das Rechteck vier rechte, die Rhomboide gegenüberliegende spitze und stumpfe Winkel enthält.

Das Quadrat, die Raute, das Rechteck und die Rhomboide haben mit einander gemein, daß die gegenüberliegenden Seiten gleichlaufend oder parallel (auch gleich) sind.

Vierecke, welche gegenüberliegende parallele (und gleiche) Seiten haben, nennt man Parallelogramme.

Das Quadrat ist daher ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln.

Die Raute ist ein Parallelogramm von vier gleichen Seiten und gegenüberliegenden gleichen (theils spitzen, theils stumpfen) Winkeln.

Das Rechteck ist ein Parallelogramm von gegenüberliegenden gleichen Seiten und vier rechten Winkeln.

Die Rhomboide ist ein Parallelogramm von gegenüberliegenden gleichen Seiten und eben solchen (aber theils spitzen, theils stumpfen) Winkeln.

Das Paralleltrapez ist folglich so wenig, als das Trapez, ein Parallelogramm zu nennen.

Diese Erklärung vom Parallelogramme ist ebenfalls nur eine Worterklärung.

Gleichwie in dem Dreyecke, so kann auch in dem Vierecke, jede Seite die Grundlinie heißen. Die Höhe ist sodann ein Loth von der entferntesten gegenüberliegenden Winkelspitze des Vierecks auf diese Grundlinie.

Im Quadrate ist die Grundlinie der Höhe gleich.

In der Raute muß die Höhe kleiner, als die Grundlinie seyn.

In dem Rechtecke ist die Höhe bald kleiner, bald größer als die Grundlinie, nachdem man die größere oder kleinere Seite des Rechtecks zur Grundlinie wählt.

In der Rhomboide kann die Höhe ebenfalls bald kleiner, bald größer als die Grundlinie seyn. Die Beweise dafür gibt die Geometrie. Die Anschauung erläutert diese Sätze.

Unter der Diagonallinie (Querlinie oder Diagonale) des Vierecks versteht man eine gerade Linie, welche von einem beliebigen Winkelpuncte nach dem entgegenstehenden, gezogen wird.

In jedem Vierecke sind zwey Diagonallinien möglich.

Jede Diagonallinie theilt das Viereck in zwey Dreyecke, die eine gemeinschaftliche Seite haben. Durch zwey Diagonalen wird das Vierecke in vier Dreyecke getheilt, deren jedes zwey anliegende und ein gegenüberliegendes hat.

Unten. Wenn abdc ein Paralleltrapez ist,

worin ab und cd die parallelen Seiten sind, so ist das Loth an die Höhe dieses Vierecks. Durch die Diagonale ad entstehen zwey Dreyecke acd und abd, welche die gleichlaufenden Seiten cd und ab zu Grundlinien und das Loth an (wie in der Geometrie zu erweisen ist) zur Höhe haben.

Jedes Paralleltrapez wird durch eine Diagonale in zwey Dreyecke getheilt, welche einerley Höhe und die Parallelseiten zu ihren Grundlinien haben.

Tafel 77.

Verschiedenheit der Lage zweyer Parallelogramme über einerley Grundlinie und von gleicher Höhe.

Wenn zwey Parallelogramme die nämliche Grundlinie und Höhe haben, und man stellt sie mit diesen gleichen Grundlinien in einander, so daß beyde Parallelogramme auf einerley Seite derselben liegen, so hat eine dreyfache Lage derselben Statt.

Oben. Hier befinden sich, über der Grundlinie mn, die beyden Parallelogramme mnba und mncb; die Seitenlinie mb des Parallelogramms mncb ist hier zugleich die Diagonale des Parallelogramms mnba, und es entstehen durch diese Lage drey Dreyecke: mab, bmn und nbc.

Mitten. Ueber der Grundlinie pq stehen hier die Parallelogramme pqna und pqcm. Die Seitenlinie pm des zweyten Parallelogramms durchschneidet hier die Linie an zwischen a und n, und es entstehen hierdurch zwey Dreyecke pam, qnc, und ein Paralleltrapez mnqp.

Unten. Die Parallelogramme cdma und cdbn haben cd zur gemeinschaftlichen Grundlinie. Die Seitenlinie des zweyten cn durchschneidet hier die Seitenlinie dm des ersten im Puncte g. Hierdurch entstehen die zwey Paralleltrapeze amgc, nbdg und die zwey Dreyecke cgd, mgn.

Tafel 78.

Congruenz, Aehnlichkeit und Gleichheit der Vierecke. Das in den Kreis beschriebene Viereck; der in das Viereck beschriebene Kreis.

Oben. Vierecke sind congruent, wenn sie so ineinander gelegt werden können, daß alle Seiten und alle Winkel des einen, die zugehörigen Seiten und Winkel des andern decken. Aus der (durch Gründe der Geometrie) bewiesenenen Congruenz der Vierecke kann man auf die Gleichheit ihrer, der Lage noch übereinstimmenden, Seiten und Winkel schliesen; so wie man umgekehrt, aus dem beyderseitigen Decken dieser Seiten und Winkel, auf die Congruenz der Vierecke schliesen kann. Es ist sehr zweckmäßig, diese Congruenz der Vierecke durch wirkliche Zeichnungen zu erläutern.

Die Aehnlichkeit der Vierecke besteht darin, daß in zwey Vierecken die Winkel nach einerley Ordnung einander gleich, und die, diese Winkel bildenden Seiten proportional sind. Dieses Proportionalseyn besteht aber darin, daß irgend eine Seite des einen Vierecks so vielmal größer oder kleiner, als die ihr zugehörige des andern ist, so vielmal größer

oder kleiner jede andere Seite jenes Vierecks gegen die ihr entsprechende Seite in diesem ist.

Die Vierecke abcd und fgpq sind ähnlich, wenn W. a und W. f; W. b und W. g; W. c und W. p, und W. d und W. q gleich sind, auch ad so vielmal größer als fq ist, so vielmal ab größer als fg, bc größer als gp und cd größer als pq ist. Daß diese Erklärung keine Sacherklärung sey, leuchtet von selbst ein, so wie auch die Bedingungen unter welchen zwey Vierecke einander ähnlich sind, nicht hierher, sondern in die eigentliche Geometrie gehören.

Mitten. Die Gleichheit zweyer Vierecke besteht in der gleichen Größe ihrer Flächenräume.

Diese Gleichheit kann hier durch ein leichtes Beyspiel erläutert werden.

In dem Vierecke abcd sey ad so groß wie cd. Zieht man die Diagonale bd, so entstehen zwey Dreyecke bda und bdc. Denkt man sich nun, das Dreyeck bdc rücke, um den festen Punct d, von b gegen a und f so lange hin, bis dc in da liegt, so bekömmt das Dreyeck dcb die Lage von daf. Hierdurch ist offenbar das Viereck abcd dem Vierecke bdaf an Flächenraume gleich, obschon beyde eine verschiedene Gestalt haben.

Auch hier bemerke man: congruente Vierecke stimmen in Größe und Gestalt, ähnliche Vierecke nur in der Gestalt, gleiche Vierecke nur in der Größe überein.

Unten. Das Viereck heißt in den Kreis

beschrieben, wenn es mit seinen vier Winkelpuncten in der Kreislinie liegt, wie z. B. abcd. Der Kreis heißt hier: um das Viereck beschrieben, weil sein Umfang durch die vier Scheitelpuncte des Vierecks geht.

Tafel 79.

Der in das Viereck beschriebene Kreis; das um den Kreis beschriebene Viereck. — Das Fünfeck und seine verschiedene Arten.

Oben. Wenn ein Kreis die vier Seiten des Vierecks in vier Puncten berührt, so heißt der Kreis in das Viereck beschrieben, das Viereck aber um den Kreis beschrieben. Zum Beyspiel dienet der Kreis ghmn und das Viereck abcd.

Mitten. Wenn abcda ein gegebenes Viereck ist, und man nimmt einen Punct m, der ausserhalb ad und zwischen den verlängerten ba und cd liegt, so entsteht, wenn die geraden Linien ma und md gezogen werden, das Fünfeck mabcd. Nähme man den Punct n innerhalb des Vierecks und zöge die geraden na und nd, so entstände auch ein Fünfeck abcdn mit dem einwärts gehenden Winkel n.

Ein Fünfeck ist eine Figur, welche von fünf Linien eingeschlossen wird.

Ein gerabliniges Fünfeck besteht aus fünf geraden, ein krummliniges aus fünf krummen und ein gemischtliniges aus fünf, theils geraden theils krummen, Linien.

Daß man an jedem Fünfecke fünf Seiten, fünf

Winkel und den eingeschlossenen Flächenraum unterscheiden könne, ist von selbst klar.

Unten. Die Entstehung des Fünfecks läßt sich auch dadurch einsehen, daß aus dem Puncte h fünf gerade Linie ha, hb, hc, hd und hf gezogen sind, welche um diesen Punct fünf Winkel bilden. Verbindet man nun die Endpuncte dieser Linien (deren drey aber nicht in gerader Linie liegen dürfen) durch die geraden ab, bc, cd, df und fa, so entsteht das Fünfeck abcdf.

Ein Dreyeck, Viereck oder Fünfeck heißt unregelmäßig oder unordentlich, wenn weder alle Seiten, noch alle Winkel darin gleich sind.

Regelmäßig oder ordentlich wird ein Dreyeck, Viereck oder Fünfeck genennt, wenn in ihm alle Seiten und alle Winkel gleich sind.

Ueberhaupt heißt eine Figur regelmäßig oder ordentlich, wenn sie lauter gleiche Seiten und Winkel hat, unregelmäßig oder unordentlich aber, wenn weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind.

Das ungleichseitige Dreyeck, das ungleichseitige Viereck sind unregelmäßige; aber das gleichseitige Dreyeck und das Quadrat sind regelmäßige Figuren.

Das Fünfeck abcdf ist ebenfalls unordentlich; allein

Tafel 80.

Das regelmäßige Fünfeck. Mittelpunct, Polygon- und Centri-Winkel. — Das Sechseck, Siebeneck rc. auf gleiche Weise. Begriff des Vielecks, des regelmäßigen und unregelmäßigen Vielecks und des Perimeters.

Oben. Das Fünfeck bcdfa ist ein regelmäßiges oder ordentliches.

Diese Erklärungen von regelmäßigen und unregelmäßigen Figuren sind blose Worterklärungen.

Der Punct g, welcher von allen Winkelpuncten des Fünfecks gleichweit entfernt ist, heißt Mittelpunct des Fünfecks. Zieht man die geraden Linien ag, bg, cg, dg und fg, so entstehen fünf Dreyecke: agb, bgc, cgd, dgf, fga, welche einander congruent sind. Jeder der fünf gleichen Winkel: fab, abc, bcd, cdf und dfa heißt der Umfangs- oder Polygonwinkel; jeder der fünf gleichen Winkel: agb, bgc, cgd, dgf, fga aber der Mittelpuncts- oder Centriwinkel des Fünfecks. Jeder Umfangswinkel wird durch eine gerade Linie von seinem Scheitel nach dem Mittelpuncte in zwey gleiche Theile getheilt.

Mitten und Unten ist ein Fünfeck in dem Kreise, ein Kreis um das Fünfeck, ferner ein Kreis in dem Fünfeck, und ein Fünfeck um den Kreis beschrieben, wovon die Erklärungen leicht zu geben sind.

Anmerkung. Um nicht zu weitläuftig zu werden, übergehen wir hier eine gleiche Behandlung der Sechsecke und Siebenecke; überzeugt, daß

der verständige Lehrer sie leicht ersetzen und der lernbegierige Schüler leicht fassen wird. Daher nur noch eine Erklärung zum Schlusse.

Vielecke oder Polygone heißen alle Figuren, welche mehr als vierseitig sind. Was man unter regelmäßigen und unregelmäßigen Vielecken verstehe, ist nun von selbst klar. Noch bemerke man, daß eine gerade Linie, welche allen Seiten eines Vielecks zusammengenommen gleich ist, der Perimeter oder die Umfangslinie genennt wird.

Tafel 81.

Begriff der Kreislinie, Kreisfläche, des Mittelpuncts, Halbmessers, Durchmessers, Umfangs, Bogens, Halbkreises, Quadranten, der Sehne, des ihr zugehörigen Bogens, des Abschnitts und Ausschnitts.

Oben. Wenn die gerade Linie ca, mit ihrem einen Endpuncte c unbeweglich, sich in der Ebene des Papiers einmal ganz und gar herumbewegt, bis sie wieder in ihre erste Lage ca zurückekehrt, so beschreibt ihr Endpunct a eine krumme, in sich selbst zurücklaufende Linie aghfa, welche man die Kreislinie nennt.

Die von der Kreislinie eingeschlossene Ebene heißt die Kreisfläche.

Halbmesser oder auch Radius des Kreises heißt jene gerade Linie, aus deren Umdrehung der Kreis entstand. Der unbewegliche Endpunct c des Halbmessers heißt Mittelpunct, der bewegliche a der beschreibende Punct der Kreislinie.

Diese Erklärungen von Kreislinien und Kreisflächen sind Sacherklärungen.

Nach dieser Entstehung der Kreislinie läßt sich dieselbe auch so erklären: Die Kreislinie ist eine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, worin alle Puncte vom Mittelpuncte gleiche Entfernung haben.

Die Kreisfläche ist eine Figur, weil sie eine allseitig begrenzte Ebene ist.

Unter Pheripherie oder Umfang des Kreises versteht man die krumme Kreislinie selbst. Jeder Theil von ihr, z. B. fbh, heißt ein Bogen des Kreises oder Kreisbogen.

Wenn man den Halbmesser ac über c verlängert, bis er den Umfang in h erreicht, so heißt diese gerade Linie ha Durchmesser oder Diameter des Kreises. Da ch so wie ca ein Halbmesser ist, so besteht der Durchmesser aus zwey Halbmessern.

Es ist klar, daß in jedem Kreise alle Halbmesser und alle Durchmesser einander gleich sind.

Der Durchmesser theilt den Kreis in zwey gleiche Theile, wovon jeder ein Halbkreis heißt. Für den Durchmesser ha ist hfa der eine, und hga der andere Halbkreis.

Wenn der Bogen agd der vierte Theil des ganzen Umfanges ist, so heißt er ein Quadrant. Auch versteht man bisweilen unter Quadrant das Stück der Kreisfläche acdga, welches von dem vierten Theile der Peripherie agd und den zwey Halbmessern ac und dc begrenzt wird. Am Füglichsten unterscheidet man daher den Linien-Quadranten von dem Flächen-Quadranten.

Unten. Eine Sehne oder Chorde heißt jede gerade Linie im Kreise, welche die Peripherie in zwey Puncten schneidet und nicht durch den Mittelpunct geht. Zu jeder Sehne gehören zwey Bogen, ein kleinerer und ein größerer, welche zusammen die ganze Kreislinie bilden.

Wenn ab eine Sehne im Kreise ist, welcher aus dem Puncte c mit dem Halbmesser cm beschrieben wurde, so gehört sowohl der Bogen anb, als auch der Bogen amdb zu dieser Sehne.

Abschnitt heißt jenes Stück der Kreisfläche, welches von einer Sehne und dem dazugehörigen Bogen eingeschlossen ist.

Jede Sehne bildet mit den dazugehörigen zwey Bogen auch zwey Abschnitte, wovon der eine der größere, der andere der kleinere ist. Geht die Sehne durch den Mittelpunct, d. h. wird sie Durchmesser, so ist jeder Abschnitt dem andern gleich, d. i. jeder Abschnitt wird ein Halbkreis.

Die Sehne ab bildet zwey Abschnitte, wovon der eine anba, der andere amdba ist.

Ein Ausschnitt oder Sector ist jener Theil der Kreisfläche, welcher von zwey Halbmessern und dem zwischen ihnen liegenden Bogen begrenzt ist.

Die Halbmesser cm und cd bilden mit dem Bogen md den Ausschnitt mcdm.

Der Winkel des Ausschnitts heißt jener Winkel, welchen die zwey Halbmesser am Mittelpuncte bilden, z. B. der Winkel mcd. Bogen des Ausschnitts wird jener Bogen genennt, wel-

cher sich zwischen den beyden Halbmessern befindet; z. B. der Bogen md.

Tafel 82.

Begriff der Mittelpuncts- und Peripherie-Winkel, des Bogens, worauf sie stehen, des äussern und innern Winkels und der Tangente.

Oben. Unter Mittelpunctswinkel, versteht man jene Winkel im Kreise, deren Scheitel im Mittelpuncte liegen und deren Schenkel zwey Halbmesser sind.

Der Bogen zwischen seinen Schenkeln heißt der Bogen, worauf er steht.

Der Winkel acb ist folglich ein Mittelpunctswinkel, der auf dem Bogen ab steht.

Peripheriewinkel, oder auch Kreiswinkel oder Umfangswinkel heißen jene Winkel, deren Scheitel in der Peripherie liegen und deren Schenkel Sehnen des Kreises sind. Auch hier heißt der zwischen diesen Schenkeln liegende Kreisbogen, der Bogen, worauf er steht.

Der Winkel adb ist ein Peripheriewinkel, welcher auf dem Bogen ab steht.

Unten. Ein Winkel, dessen Scheitel ausserhalb des Kreises liegt, dessen Schenkel aber in ihrer Verlängerung zu Sehnen des Kreises werden, heißt ein äusserer Winkel am Kreise. Ein innerer Winkel aber wird jener genennt, dessen Scheitel in der Kreisfläche liegt und der mit seinen Schenkeln die Peripherie schneidet.

Demnach ist Winkel abd ein äusserer, und fhg ein innerer Winkel am Kreise.

Tangente oder Berührungslinie heißt jene gerade Linie ausserhalb des Kreises, welche, wenn sie auch über ihre beyde Enden noch so weit verlängert wird, diesen Kreis nur in einem einzigen Puncte berührt.

Die Linie mn, welche die Kreislinie nur im Puncte q berührt, ohne bey irgend einer Verlängerung über m und n den Kreis nochmals zu schneiden, ist die Tangente.

Welche von den seitherigen Erklärungen (Taf. 81 und 82) Sach- und welche Worterklärungen sind, wird der Anfänger, auch ohne Beyhülfe des Lehrers, selbst bemerken.

Tafel 83.

Begriff der concentrischen und excentrischen Kreise, des Ringes und der sich schneidenden Kreise.

Oben. Concentrische Kreise heißen jene, welche aus dem nämlichen Mittelpuncte mit verschiedenen Halbmessern beschrieben sind.

Die Kreise dfh und bmn, welche aus dem gemeinschaftlichen Mittelpuncte c mit ungleichen Halbmessern cd und cb beschrieben wurden, sind also concentrische Kreise.

Ring heißt jene Figur, welche von den Peripherien zweyer concentrischen Kreise eingeschlossen wird.

dfhdbmnb ist daher der Ring, welchen die beyden hier gezeichneten Kreislinien einschließen.

Man sieht leicht, daß dieser Ring übrig bleibt, wenn man von der größern Kreisfläche die kleinere hinwegnimmt.

Unten. Zwey Kreise, welche zwey Puncte ihrer Peripherien gemein haben, heißen sich schneidende Kreise.

Von dieser Art sind die Kreise um c und um d, welche sich in den Puncten m und n durchschneiden.

Tafel 84.

Begriff und Arten der Berührungskreise.

Kreise, welche nur einen Punct gemein haben, heißen: sich berührende Kreise, oder Berührungskreise.

Diese Berührung hat entweder von innen oder von aussen Statt.

Die beyden aus n und m (Oben) beschriebenen Kreise sind Berührungskreise von innen, die aus g und f (Unten) beschriebenen Kreise berühren sich von aussen.

Schlußwort.

Da dieser dritte Cursus den wichtigen Uebergang vom Beschauen zum Begreifen (vom Intuitiven zum Discursiven) bildet, so wird der verständige Lehrer (zumal bey sehr jugendlichen Schülern) das Wissenswürdigste davon examinatorisch wiederholen, ehe er weiter schreitet.

Der geometrischen Anschauungslehre vierter Cursus.

Vierter Cursus.

Hier betrachten wir I. die Abkürzungszeichen, II. die Grundsätze und Foderungen, III. den Begriff, die Haupttheile und die Methode der Mathematik.

I. Abkürzungszeichen.

Unter Abkürzungszeichen versteht man jene willkührlich gewählte, von allen Mathematikern angenommene Zeichen, welche sowohl zur Abkürzung, als zur bequemern Uebersicht des mathematischen Vortrags dienen.

Die gebräuchlichsten sind nachfolgende:

1) Zwey gleiche Parallelstriche, oder $=$, als das Zeichen der Gleichheit. Es deutet an, daß jene Größen, zwischen welchen es sich befindet, einander gleich sind. Wenn z. B. von zwey geraden Linien, welche ab und cd heißen mögen, eine so groß als die andere ist, so wird dieses mit $ab = cd$ bezeichnet. Wäre noch eine dritte gerade Linie fg

so groß, als jede der beyden vorigen, so setzte man, um ihre Gleichheit auszudrücken: ab = cd = fg.

Anmerkung. Es ist sehr zweckmäßig, wenn der Schüler alle zu diesen Abkürzungszeichen gehörige Zeichnungen selbst entwirft, wodurch derselbe sowohl geistig, als mechanisch geübt wird. Aus diesem Grunde sind gegenwärtigem Cursus keine Zeichnungen beygefügt worden.

Wären abc und dfg zwey Winkel, welche von gleicher Größe sind, so wird ihre Gleichheit dadurch angedeutet, daß man schreibt: W. abc = W. dfg.

2) Zwey kleine gerade Linien, welche einen spitzen Winkel bilden, oder: < sind das Zeichen der Ungleichheit. Die kleinere Größe wird an dessen Spitze, die größere an dessen Oeffnung gesetzt. Wenn z. B. ab eine kleinere, cd eine größere gerade Linie bezeichnet, so heißt ab < cd so viel als: die gerade Linie ab ist kleiner, als die gerade Linie cd. Umgekehrt, heißt cd > ab so viel als: die gerade Linie cd ist größer, als die gerade Linie ab.

Bezeichnet man durch abc einen stumpfen, durch fgh einen spitzen Winkel, so setzt man W. abc > W. fgh; oder auch W. fgh < W. abc.

Heißt der größere Winkel o, der kleinere u, so ist W. o > W. u und W. u < W. o.

3) Ein liegendes lateinisches S, oder ∾ ist das Zeichen der Aehnlichkeit. Wenn z. B. abc und fgh zwey Dreyecke benennen, welche ähnlich sind, so bemerkt man dieses durch Dr. abc ∾ Dr. fgh.

Wenn die Buchstaben abcd und fgmn zwey ähn-

liche Vierecke bezeichnen, so schreibt man kurz: V. abcd ∾ V. fgmn.

4) Da die Congruenz in der Gleichheit und Aehnlichkeit zugleich besteht, so ist auch das Zeichen der Congruenz aus dem Gleichheits- und Aehnlichkeitszeichen zusammengesetzt, nämlich dieses ≅.

Es heißt also der Ausdruck: Dr. fgh ≅ Dr. abc so viel, als: das Dreyeck fgh und das Dreyeck abc sind congruente Dreyecke.

Wenn fghm und abcd zwey congruente Vierecke bezeichnen, so heißt dieses kurz: fghm ≅ abcd.

5) Um einen Winkel zu bezeichnen, bedient man sich bisweilen des Zeichens: ∡ (wofür wir aber in der Folge immer den Buchstaben W. setzen werden). Es heißt also: ∡ abc, ∡ d, ∡ x soviel als Winkel abc, Winkel d, Winkel x.

Der Ausdruck: W. a = W. b, oder: W. x > W. u, oder: W. abc < W. dfg ist also leicht zu verstehen.

6) Das Zeichen des Dreyecks ist dieses: △. Daher heißt △ abc soviel als: das Dreyeck abc.

Die Ausdrücke:

△ abc > △ bcf,

△ mhn < △ fgb,

△ agh ∾ △ mdc,

△ cgh ≅ △ abn,

△ bdf = △ agn sind demnach leicht mit Worten auszudrücken, und mit Zeichnungen zu erläutern.

7) Zur Bezeichnung des rechten Winkels dient der lateinische Buchstabe R, und der Ausdruck: W.

abc = R heißt, der Winkel abc ist ein rechter Winkel.

Wenn der Winkel gfh ein spitzer ist, so schreibt man: W. gfh < R, und wenn W. mnd ein stumpfer ist, so wird W. mnd > R gesetzt.

8) Um anzudeuten, daß zwey gerade Linien gleichlaufend oder parallel sind, setzt man bisweilen das Zeichen # zwischen die Buchstaben, womit solche Linien bezeichnet sind. Es heißt also: ab # cd soviel als: die gerade Linie ab ist mit der geraden Linie cd gleichlaufend oder parallel.

Der Ausdruck: ab # cd # mn heißt: die drey geraden Linien ab, cd und mn sind mit einander gleichlaufend. Auch kann man die Anfangsbuchstaben par. zwischen die mit Buchstaben bezeichneten Parallellinien setzen und so schreiben: ac par. cd par. mn.

9) Das Zeichen des Hinzusetzens (Addirens) ist ein kleines stehendes Kreuz, oder + welches zwischen jene Größen gesetzt wird, welche man zusammen zu einer einzigen verbinden soll. Man spricht es durch zu, oder dazugesetzt, oder: plus aus.

So heißt z. B. 7 + 5 + 10 soviel, als die drey Zahlen: 7, 5 und 10 sollen in eine einzige Zahl gebracht (addirt oder summirt) werden. Da nun hieraus die Zahl 22 ensteht, so ist 7 + 5 + 10 = 22.

Wenn man aus dem Scheitelpuncte b des rechten Winkels abc eine gerade Linie bd zieht, welche diesen Winkel in die zwey Theile abd und dbc theilt, so ist hier

W. abd + W. dbc = R, ferner

W. abd < R, und auch W. dbc < R.

Zöge man aus b eine Linie bf, welche ausserhalb des Winkels abc fällt, und eine Lage hat, daß W. abf < R, so ist jetzt

W. fbc > R, auch

W. fba + W. abd + W. dbc = W. fbc.

10) Das Zeichen des Hinwegnehmens (Subtrahirens) ist ein kleiner Querstrich, oder — welcher zwischen zwey Größen so gesetzt wird, daß die kleinere zur Rechten, die größere zur Linken steht. Es wird durch weniger oder minus ausgesprochen.

Es heißt also 20 — 8 soviel als 20 weniger 8, d. h. von 20 soll 8 weggenommen (subtrahirt) werden. Da nun hierdurch noch 12 übrig bleibt, so ist 20 — 8 = 12.

Wenn aus dem Scheitelpuncte m des Winkels cmd eine gerade Linie mg zwischen den Schenkeln cm und dm gezogen wird, so ist W. cmd — W. cmg = W. gmd, und W. dmc — W. dmg = W. gmc.

11) Zur Uebung in diesen Abkürzungszeichen setzen wir noch folgende Fragen her. Der Anfänger muß ihren Sinn beantworten, und die ihnen entsprechenden Zeichnungen selbst entwerfen.

Was heißt demnach:

ab = cd? oder mn = fh?

bc = gh = ma?

dg > bc? oder ab < dg?

ad > bg > mn > pq?

W. abc = W. hfg?
W. ghf < W. hdr?
W. nhm > W. dgf?
W. bac + nhm = R?
W. gfa > R? oder W. dgf < R?
W. abc — W. dgh = R?
W. gfh — W. gfn = W. nhf?
W. agh = R — W. o?
W. o + W. u = W. x + W. y?
W. abc > W. dbf + W. fbc > R?
ab # cd? oder df # bd # mn?
△ abc ≅ △ mgn?
△ gfh = △ fhd? oder △ bcd ∼ △ fgh?
△ abd > △ abf? △ ndf < △ ndh?
△ abg + △ agf = △ abf? u. s. w.

II. Grundsätze und Foderungen.

A. Grundsätze.

Ein Grundsatz oder Axiom ist ein Satz, der eine Behauptung enthält, welche so klar ist, daß ihre Wahrheit für sich selbst schon Jedem einleuchtet, sobald er nur ihren Sinn versteht. Diese Grundsätze sind in der Mathematik von der größten Wichtigkeit, und der Anfänger muß sich durchaus mit denselben bekannt machen, wenn er von der Schärfe mathematischer Beweise überzeugt seyn will.

1. Grundsatz.

Jede Größe ist sich selbst gleich.

An der Wahrheit dieses Satzes wird Niemand

zweifeln. Z. B. wenn ab eine gerade Linie vorstellt, so ist ab = ab, oder auch ab = ba, oder ba = ab, oder ba = ba. Es bezeichne abc einen Winkel, so ist wieder W. abc = W. abc, oder auch W. abc = W. cba. Desgleichen ist 8 = 8, 12 = 12 u. s. f.

II. Grundsatz.

Das Ganze ist so groß, als alle seine Theile zusammengenommen; oder: Alle Theile zusammen sind dem Ganzen gleich.

Wenn man z. B. den Winkel mdn als das Ganze betrachtet, und durch die, aus seinem Scheitel d innerhalb der Schenkel gezogenen Linien df und dg in die drey Winkel mdf, fdg und gdn als dessen Theile eintheilt, so ist offenbar: W. mdn = W. mdf + W. fdg + W. gdn, und auch W. mdf + W. fdg + W. gdn = W. mdn.

Desgleichen ist 25 = 10 + 8 + 7, und umgekehrt 10 + 8 + 7 = 25; oder auch

8 + 10 + 7 = 7 + 8 + 10 = 25,

Erläuterung an Dreyecken, oder an andern Figuren, welche man durch gezogene Linien in mehrere Theile zertheilt, und aus der Summe dieser Theile wiederum zusammensetzt.

III. Grundsatz.

Das Ganze ist größer als einer, oder als einige seiner Theile zusammengenommen; oder: Ein Theil allein, oder mehrere Theile zusammengenommen, sind kleiner als das Ganze.

Es bestehe z. B. ein Winkel abc aus den drey Winkeln abd, dbn und nbc, so ist:

W. abc > W. abd, oder W. abc > W. dbn, oder W. abc > W. nbc; ferner:

W. abc > W. abd + W. dbn, oder W. abc > W. abn;
W. abc > W. dbn + W. nbc, oder W. abc > W. dbc;
W. abc > W. abd + W. nbc.

Desgleichen ist auch:

W. abd < W. abc u. s. w., und W. abn < W. abc, oder W. dbc < W. abc u. s. f.

Eben so leicht kann dieser Grundsatz durch Zahlen, so wie durch Figuren, z. B. durch Dreyecke, erläutert werden.

IV. Grundsatz.

Wenn jede von zwey Größen derselbigen dritten Größe gleich ist, so sind jene beyden Größen auch unter sich gleich.

Es seyen A und B die zwey Größen, deren jede der Größe C gleich ist, so wird die allgemeine Form dieses Grundsatzes diese:

$$\text{Wenn} \left\{ \begin{array}{c} A = C \\ B = C \\ \hline A = B \end{array} \right\} \text{so ist auch}$$

Da nun z. B. in Zahlen

$$\begin{array}{l} 8 + 12 = 20 \text{ und} \\ 15 + \ \ 5 = 20, \text{ so ist auch} \\ \hline 8 + 12 = 15 + 5 \end{array}$$

Oder:

$$\begin{array}{l} 30 - 6 = 24, \text{ und} \\ 20 + 4 = 24, \text{ folglich} \\ \hline 30 - 6 = 20 + 4 \end{array}$$

Es sey ferner:

W. abc + W. cbd = R und
W. fgh + W. hgn = R, so ist auch
W. abc + W. cbd = W. fgh + W. hgn.

Oder: 60 Kreuzer = 1 Gulden
15 Batzen = 1 Gulden
60 Kreuzer = 15 Batzen.

Was folgt vermöge dieses Grundsatzes aus nachstehenden Sätzen:

$\left. \begin{array}{l} ab = cd \\ mn = cd \end{array} \right\}$ folglich?

Oder: $\left\{ \begin{array}{l} W.\ o = W.\ u \\ W.\ u = W.\ x \end{array} \right\}$ folglich?

Oder: $\left\{ \begin{array}{r} W.\ x + W.\ u = W.\ y \\ W.\ z = W.\ y \end{array} \right\}$ folglich?

Oder: $\left\{ \begin{array}{l} ab - ad = db \\ dm + mn = db \end{array} \right\}$ folglich?

Oder: $\left\{ \begin{array}{l} W.\ o + W.\ u = R \\ R = W.\ z + W.\ y \end{array} \right\}$ folglich?

u. s. w.

Folgerungen.

1) Es sey $A > B$, und
$B > C$, so ist
$A > C$

2) Für $M < N$, und
$N < O$,
$M < O$

3) Aus $P > Q$, und
$\underline{Q < S}$, folgt weder
$P > S$, noch
$P < S$; denn es
kann sowohl $P > S$, als auch $P < S$ seyn.

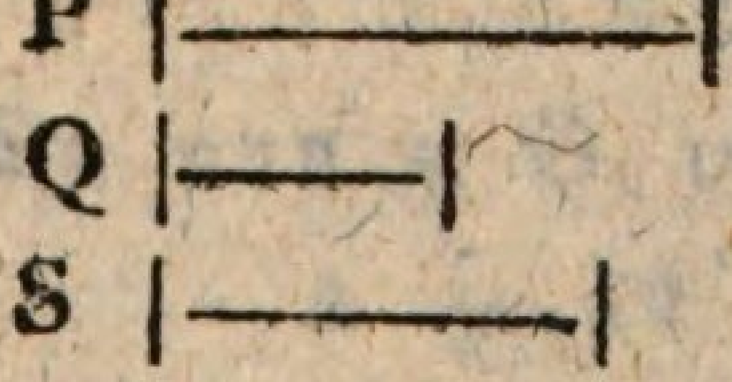
4) Wenn $A > B$, und
$\underline{B = C}$ ist, so wird
$A > C$

5) Es sey $M < N$, und
$\underline{N = O}$, so ist
$M < O$, u. dgl. m.

Anmerkung. 1) Der Lehrer lasse sich den Sinn einer jeden dieser Folgerungen von den Anfängern mit Worten aussprechen; z. B. No. 1: Wenn eine Größe größer ist, als eine zweyte, welche selbst wieder größer ist, als eine dritte, so ist auch die erste Größe größer, als die dritte.

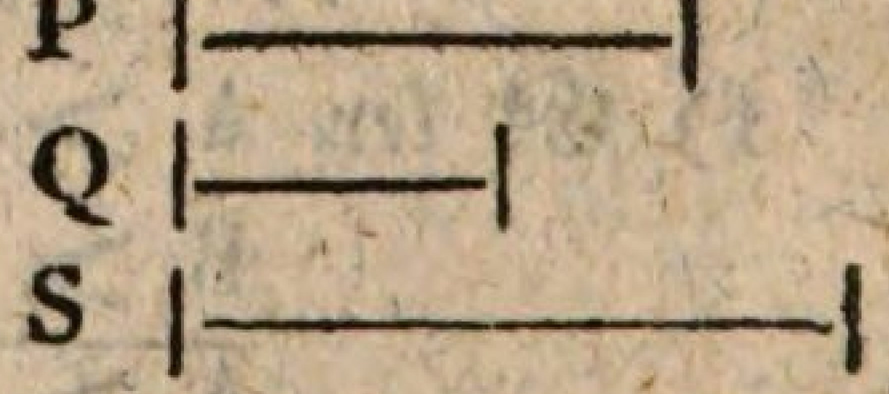
2) Zur Erläuterung von No. 3 wähle man schickliche Beyspiele; z. E.

I.



Hier ist $P > Q$
$\underline{Q < S}$, und
$P > S$

II.



Hier ist auch $P > Q$,
$\underline{Q < S}$, aber
$P < S$

V. Grundsatz.

Wenn man gleiche Größen zu gleichen Größen setzt, so sind die hierdurch entstehenden neuen Größen (die Summen) einander gleich.

Es sey $A = B$ und $C = D$, so ist die allgemeine Form dieses Grundsatzes diese:

Wenn $A = B$, und
$C = D$, so ist

$$A + C = B + D.$$

Wenn W. o = W. u, und
W. x = W. y ist, so ist
auch W. o + W. x = W. u + W. y.

Erläuterung dieses Grundsatzes in Zahlen und in Figuren sind ebenfalls sehr leicht.

Folgerungen.

1) Es sey $\left.\begin{cases} A = B \\ C = D \\ E = F \end{cases}\right\}$ so ist auch

$$A + C + E = B + D + F$$

2) Es sey $\left.\begin{cases} M = P + Q \\ R = S + T \end{cases}\right\}$ so ist

$$M + R = P + Q + S + T$$

u. dgl. m.

VI. Grundsatz.

Wenn man von gleichen Größen gleiche Größen hinwegnimmt, so bleiben auch wieder gleiche Größen (gleiche Reste) übrig.

Wenn $A = B$ und $C = D$ ist, so ist die allgemeine Form dieses Grundsatzes diese:

$$\begin{array}{r} A = B \\ C = D \text{ folglich} \\ \hline A - C = B - D. \end{array}$$

Es sey ferner:

$$\begin{array}{r} \mathfrak{W}.\ abc + \mathfrak{W}.\ cbd = R \text{ und} \\ \mathfrak{W}.\ cbd = \mathfrak{W}.\ o, \text{ so ist} \\ \hline \mathfrak{W}.\ abc = R - \mathfrak{W}.\ o. \end{array}$$

Erläuterung an Figuren und Zahlen sind wieder sehr belehrend, um den Anfängern die Anwendung dieses Grundsatzes geläufig zu machen.

VII. Grundsatz.

Wenn man zu gleichen Größen ungleiche Größen setzt, so sind die hieraus entstehenden Größen (die Summen) ungleich.

Wenn $A = B$, $C > D$ und $M < N$ ist, so wird dieser Grundsatz folgende zwey allgemeine Fälle enthalten:

$$\begin{array}{r} 1)\ A = B \\ C > D \text{ folglich ist} \\ \hline A + C > B + D. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2)\ A = B \\ M < N \text{ folglich} \\ \hline A + M < B + N. \end{array}$$

Andere Erläuterungen darüber sind leicht zu geben.

Folgerungen:

$$\begin{array}{l} 3)\ A > B \text{ und} \\ \underline{\quad M > N}, \text{ so ist auch} \\ A + M > B + N. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4)\ A < B \\ \underline{\quad M < N}, \\ A + M < B + N. \end{array}$$

Anmerkung. Es ist sehr bildend für die Denk- und Sprachkraft, wenn der Anfänger jeden dieser vier Sätze mit Worten allgemein ausspricht.

VIII. Grundsatz.

Wenn man von gleichen Größen ungleiche hinwegnimmt, so müssen ungleiche Größen (ungleiche Reste) übrig bleiben.

Es sey $A = B$, $C > D$ und $M < N$, so gibt dieser Grundsatz Folgendes:

$$\begin{array}{l} 1)\ A = B \\ \underline{\quad C > D} \\ A - C < B - D. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2)\ A = B \\ \underline{\quad M < N} \\ A - M > B - N. \end{array}$$

Andere Erläuterungen in Zahlen und in ebenen Figuren.

Folgerungen.

Wenn 1) $A > B$

$\underline{P > Q}$, so ist sowohl

$A - P > B - Q$, als auch

$A - P < B - Q$ denkbar, wie man leicht in Zahlen erläutern kann. Z. B.

$$\begin{array}{c} 12 > 7 \\ \underline{8 > 5} \\ 4 > 2 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c} 12 > 7 \\ \underline{10 > 2} \\ 2 < 5 \end{array}$$

Wäre 2) $E < F$, und

$\underline{M < N}$, so ist entweder

$E - M > F - N$, oder

$E - M < F - N$.

Auch könnte in 1) $A - P = B - Q$, und in 2) $E - M = F - N$ seyn. Erläuterungen sind leicht.

IX. Grundsatz.

Wenn zwey Größen einander gleich sind, so ist auch das Doppelte der einen, dem Doppelten der andern; das Dreyfache der einen, dem Dreyfachen der andern; und überhaupt jedes Vielfache der einen, dem nämlichen Vielfachen der andern gleich.

Dieser Grundsatz ist eine Folge des V. Grundsatzes. Es sey $\underline{A = B}$, so ist

$A = B$, und wieder

$\underline{A = B}$, folglich ist auch

$A + A = B + B$, das heißt

$2 A = 2 B$; folglich sind die Doppelten gleich. Da nun

$$\begin{array}{rcl} 2\,A &=& 2\,B, \text{ und auch} \\ A &=& B, \text{ so ist wieder} \\ \hline 2\,A + A &=& 2\,B + B, \text{ das ist} \\ 3\,A &=& 3\,B, \end{array}$$

folglich sind auch ihre Dreyfache gleich, u. s. f.

Erläuterungen darüber.

Folgerungen.

1) Wenn zwey Größen ungleich sind, so sind auch ihre Gleichvielfache ungleich.

2) Wenn zwey Größen gleich sind, so sind auch ihre Ungleichvielfache ungleich.

3) Wenn zwey Größen ungleich sind, so können ihre Ungleichvielfache ungleich, oder auch bisweilen gleich seyn.

Erläuterungen in Zahlen.

X. Grundsatz.

Wenn zwey Größen einander gleich sind, so sind auch ihre Hälften, ihre Drittheile und überhaupt ihre gleichvielfachen Theile einander gleich.

Wenn $A = B$ ist, so sagt dieser Grundsatz Folgendes:

$$\tfrac{1}{2}\,A = \tfrac{1}{2}\,B$$
$$\tfrac{1}{3}\,A = \tfrac{1}{3}\,B$$
$$\tfrac{1}{4}\,A = \tfrac{1}{4}\,B$$
$$\tfrac{1}{5}\,A = \tfrac{1}{5}\,B \text{ u. s. f.}$$

Auch dieser Grundsatz ist eine Folge von dem

Obigen VII. Grundſ. 1. Folger. Denn wenn $\frac{1}{2}$ A nicht $= \frac{1}{2}$ B seyn sollte, so wäre

$$\tfrac{1}{2} A > \tfrac{1}{2} B, \text{ oder } \tfrac{1}{2} A < \tfrac{1}{2} B.$$

Beydes führt aber auf einen Widerspruch. Denn wenn

$$\tfrac{1}{2} A > \tfrac{1}{2} B \text{ und man}$$

setzt wieder $\frac{1}{2} A > \frac{1}{2} B$, so müßte

$\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A > \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} B$ seyn, d. h. es wäre $A > B$, welches gegen die Voraussetzung ist.

Setzte man aber:

$$\tfrac{1}{2} A < \tfrac{1}{2} B, \text{ und wieder}$$
$$\tfrac{1}{2} A < \tfrac{1}{2} B, \text{ so müßte auch}$$
$$\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} A < \tfrac{1}{2} B + \tfrac{1}{2} B, \text{ oder}$$
$$A < B$$ seyn, welches der Voraussetzung: $A = B$, ebenfalls widerspricht.

Folgerungen.

1) Wenn zwey Größen ungleich sind, so sind auch ihre gleichvielfache Theile ungleich.

2) Wenn zwey Größen gleich sind, so sind auch ihre ungleichvielfache Theile ungleich.

3) Wenn zwey Größen ungleich sind, so können ihre ungleichvielfache Theile bald ungleich, bald auch gleich seyn.

Erläuterungen in Zahlen.

B. Foderungen.

Eine Foderung (oder ein Postulat) ist ein Satz, welcher verlangt, daß etwas ausgeführt werden soll; diese Ausführung ist aber so einfach, daß

sie Jedem, der nur ihren Sinn versteht, von selbst einleuchtet, und daher keiner besonderen Anweisung bedarf.

Für die Geometrie sind vorzüglich folgende Foderungen von Wichtigkeit.

I. Foderung.

Von jedem gegebenen Puncte zu jedem andern gegebenen Puncte eine gerade Linie zu construiren

Anmerkung. Es ist wohl zu merken, daß hier nur von der Construction einer geraden Linie in Gedanken die Rede ist. Wer eine Vorstellung von der geraden Linie hat, darf sich von dem einen Puncte zum andern nur eine gerade Linie denken, so ist die Foderung auch schon erfüllt. Soll man dagegen auf dem Papiere gerade Linien mit der Reißfeder und Tusche ziehen, so ist dieses eine mechanische Aufgabe, zu deren Auflösung gewisse Handgriffe erfoderlich sind, die man zuerst erlernen muß. Diese Bemerkung gilt von allen hier folgenden Foderungen, daher sie hier ein- für allemal an ihrer Spitze steht.

II. Foderung.

Jede gegebene gerade Linie zu beyden Seiten zu verlängern.

Auch diese Verlängerung besteht nur in Gedanken, indem sich der die Linie erzeugende Punct, in derselbigen Richtung, über jeden ihren Endpuncte fortbewegen kann.

III. Foderung.

Von einer größern geraden Linie einen Theil zu nehmen, welcher einer gegebenen kleinern geraden Linie gleich ist.

Das practische Verfahren beruht auf dem bekannten Gebrauch des Zirkels, zwischen dessen festbestimmten Endpuncten auch nur eine gerade Linie möglich ist.

IV. Foderung.

In jeder geraden Linie einen oder mehrere beliebige Puncte anzunehmen.

V. Foderung.

Einen ebenen geradlinigen Winkel zu bilden.

VI. Foderung.

Einen gegebenen Winkel größer oder kleiner zu machen.

VII. Foderung.

Jede Ebene nach allen ihren Seiten zu verlängern, oder zu erweitern.

VIII. Foderung.

Mit jeder gegebenen geraden Linie, in jeder Ebene, aus einem gegebenen Puncte einen Kreis zu beschreiben.

III. Begriff, Haupttheile und Methode der Mathematik.

Die Mathematik oder Größenlehre ist die Wissenschaft von den Größen. Eine Größe aber nennt man Alles, was vermehrt oder vermindert werden kann. So sind z. B. die Zahlen, die Linien, die Flächen und Körper Größen, denn alle diese Dinge sind einer Vergrößerung oder Verkleinerung fähig.

Da alle sichtbare Dinge eine bestimmte Größe haben, so ergibt sich hieraus der große Umfang der Mathematik.

Im Allgemeinen hat sie zwey Haupttheile, die reine und die angewandte Mathematik.

Unter der reinen Mathematik versteht man jenen Theil der Mathematik überhaupt, welcher sich blos mit den Größen an sich beschäftigt.

Eine Größe an sich betrachten, heißt aber, die Größe blos als solche betrachten, und nicht auf diejenigen wirklichen Dinge Rücksicht nehmen, an welchen sich dieselbe befindet. Wenn man z. B. die Zahl 6 blos als eine Menge von sechs Einheiten, die gerade Linie blos als eine Ausdehnung in die Länge, das Dreyeck blos als eine von drey Seiten eingeschlossene Figur betrachtet u. s. f., so wird hier die Zahl, die gerade Linie, das Dreyeck an sich, d. h. rein betrachtet.

Die angewandte Mathematik ist dagegen jener Theil der Mathematik überhaupt, welcher die

Größe der wirklichen Dinge, welche in unsere Sinne fallen, betrachtet.

Sie heißt angewandt, weil die Größe überhaupt auf diese wirkliche Dinge angewendet wird. Eine Zahl von sechs Menschen, von 80 Häusern, gehört in die angewandte Mathematik; weil dort die Zahl sechs, hier die Zahl 80, auf wirkliche körperliche Dinge, nämlich auf Menschen und auf Häuser, angewendet wird.

Eine gerade Linie, als Höhe eines Thurmes, als Länge und Breite eines Hauses, als Entfernung eines Grenzsteines von dem andern u. s. f., gehört in die angewandte Mathematik, weil sich diese gerade Linien hier an wirklichen Gegenständen, an dem Thurme, dem Hause u. s. w., befinden.

Ein Viereck, als die Gestalt eines Grundstückes, z. B. einer Wiese, eines Gartens u. s. f., gehört wiederum in die angewandte Mathematik.

Aus diesen Bestimmungen ist klar, daß die reine Mathematik der angewandten vorhergehen müsse; weil man zuerst die Verhältnisse der Größen überhaupt, oder an sich kennen muß, ehe sie auf wirkliche Gegenstände des menschlichen Lebens angewendet werden können. Man muß z. B. zuerst ein Viereck überhaupt berechnen können, ehe man es unternimmt, die Fläche einer viereckigen Wiese zu bestimmen u. s. w.

Die reine Mathematik hat wieder zwey besondere Abtheilungen, welche Arithmetik oder Zahlenlehre, und Geometrie oder Raumlehre

heißen. Ihr Unterschied ist sehr wichtig und beruht auf Folgendem.

Die Größen, an sich betrachtet, sind von doppelter Art. Ihr Wesen besteht entweder blos in der Menge der Theile, woraus sie bestehen; oder es kömmt vorzüglich auf die Art und Weise an, wie diese Theile zum Ganzen verbunden sind.

Jene Größen heißen unstetige oder discrete, diese stetige oder continuirliche Größen.

Die Zahl zwölf bleibt unverändert, in welcher Ordnung die zwölf Einheiten, welche sie bilden, unter sich stehen. Der Werth dieser Zahl hängt also blos von der Menge dieser Einheiten, nicht aber von der Art ihrer Verbindung und gegenseitigen Ordnung ab. Zwölf Menschen z. B. bleiben, der Zahl nach, immer die nämlichen, man mag sich dieselbe in gerader Linie, oder im Vierecke, oder im Kreise, oder ganz regellos stehend vorstellen.

Da es nun mit allen Zahlen so ist, so sind die Zahlen unstetige oder discrete Größen. Die Arithmetik oder Zahlenlehre ist daher jener Theil der reinen Mathematik, der sich mit den unstetigen Größen oder mit den Zahlen beschäftigt.

Eine gerade Linie, welche man sich in beliebige Theile getheilt denkt, wird nicht mehr dieselbige bleiben, wenn man diese Theile nach anderer Ordnung, als in der geraden Richtung zusammenfügt. Das Wesen der geraden Linie besteht daher in einem ununterbrochenen, lückenlosen Fortschreiten, nach einer einzigen Richtung. Die gerade

Linie ist folglich eine stetige Größe, denn wenn man diesen stetigen Zusammenhang der Linie auflöset, so hört die Linie selbst auf. Dies gilt eben so von der krummen Linie. Daher sind alle Linien stetige Größen, deren Natur in dem innigen ununterbrochenen Zusammenhange der Theile zum Ganzen besteht.

Eben so ist es mit den Flächen. Ein Dreyeck z. B. wird aufhören zu seyn, was es ist, wenn man sich dasselbe in Stücke getheilt vorstellt, und diese Stücke nach anderer Ordnung zusammensetzt. Folglich sind auch alle Flächen stetige Größen.

Die Geometrie oder Raumlehre ist daher jener Theil der reinen Mathematik, welcher von den stetigen oder continuirlichen Größen handelt.

Die stetigen Größen, welche wir bis jetzt kennen gelernt haben, sind Linien und Flächen. Es gibt noch eine dritte Gattung, nämlich die Körper, welche nach Länge, Breite und Tiefe ausgedehnt sind. So ist z. B. die Kugel und der Würfel ein Körper, weil man daran drey Hauptrichtungen der Ausdehnung, nach Länge, Breite und Tiefe unterscheidet. Die Lehre von den Körpern heißt die Körperlehre oder Stereometrie. Sie macht den Schluß der Raumlehre, und wir müssen uns hier begnügen, blos das Wort genannt zu haben.

Die Theile der angewandten Mathematik aufzuzählen, gehört ohnedies nicht hierher.

Die mathematische Methode, d. h. die Art und Weise, die Lehren der Mathematik vorzutragen,

besteht darin, daß man mit Erklärungen anfängt, aus welchen sodann Grundsätze und Foderungen abgeleitet werden. Vermittelst dieser Vordersätze werden sodann Lehrsätze bewiesen und Aufgaben aufgelöst, welchen man, zur fernern Erweiterung der Lehren, noch Zusätze beyfüget.

Erklärungen sind vollständige Angaben derjenigen Merkmale, wodurch man das Wesen einer Sache erkennt und im Stande ist, sie von allen andern zu unterscheiden. Z. B.

Das Quadrat ist jenes Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat.

Die Kreislinie heißt jene krumme Linie, welche entsteht, wenn sich eine gerade Linie, in derselbigen Ebene, um ihren einen Endpunct so lange herumbewegt, bis sie in ihre erste Lage zurückgekehrt ist.

Die Erklärungen weisen entweder deutlich nach, wie die zu erklärende Sache entsteht, oder sie sagen nur, welchen Begriff man mit einem gewissen Worte verbindet. Jene sind die Sacherklärungen, diese die Worterklärungen. Von der ersten Art ist obige Erklärung der Kreislinie, von der letzten aber jene des Quadrates. Denn die Art und Weise, wie die Kreislinie entsteht, ist Jedem von selbst schon verständlich. Wie aber eine Figur, welche vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat, entstehen und construirt werden könne, muß erst durch Hülfslehren der Geometrie besonders gezeigt werden.

Anmerkung. Der so höchst wichtige Unter=

schied zwischen Sach- und Worterklärungen muß dem Anfänger durch mehrfache Beyspiele aufgeklärt werden.

Was Grundsätze und Foderungen sind, ist bereits früher in diesem Cursus beygebracht und mit Beyspielen erläutert worden. Der verständige Lehrer wird hier deren noch mehrere geben.

Ein Lehrsatz oder Theorem ist ein Satz, welcher eine Behauptung enthält, die unter einer vorausgesetzten Bedingung Statt findet. Diese Bedingniß heißt die Hypothesis (der Grund), jene Behauptung die Thesis (die Folge) des Lehrsatzes.

Zur Vollständigkeit des Lehrsatzes gehört noch der Beweis, d. h. eine zusammenhängende Reihe von Wahrheiten, wodurch der Verstand genöthigt wird, der Behauptung des Lehrsatzes seinen Beyfall zu geben.

Um dieses alles sogleich zu erläutern, wählen wir folgendes Beyspiel. Denn allgemeine Begriffe müssen den ersten Anfängern jedesmal durch einzelne Anwendungen deutlich gemacht werden. Die zu dem nachfolgenden Lehrsatze und zur Aufgabe gehörigen Zeichnungen muß sich der Schüler selbst entwerfen. Daher sind sie hier absichtlich weggelassen.

Lehrsatz.

Der Durchmesser theilt die Kreisfläche in zwey congruente Theile.

Hier ist:

a) Hypothesis, die Voraussetzung einer Kreisfläche und eines in ihr gezogenen Durchmessers; und

b) Thesis, die Congruenz der beyden Theile, in welche dieser Durchmesser die Kreisfläche theilt.

Beweis.

Des Kreises Durchmesser sey ab, der eine Theil seines Umfanges amb, der andere anb. Denkt man sich das eine Stück der Kreisfläche amb; um den unbeweglichen Durchmesser ab, auf die entgegengesetzte Seite gelegt, so muß dasselbe einmal ganz in die Ebene fallen, worin sich auch das zweyte Stück anb befindet; nämlich in die Ebene des Papiers. Sollte nun der Bogen amb den Bogen anb nicht decken, so müßten Puncte von amb nicht in übereinstimmende Puncte von anb fallen. Da aber alle Puncte in amb vom Mittelpuncte c so weit entfernt sind, als alle Puncte in anb, so muß jeder Punct in amb auf einen zugehörigen Punct in anb fallen, d. h. der ganze Bogen amb muß in den genzen Bogen anb fallen. Daher decken sich die beyden Stücke abma und abna, und der Lehrsatz ist bewiesen.

Eine Aufgabe oder ein Problem ist jener Satz, welcher eine Foderung enthält, welcher unter einer gewissen Voraussetzung entsprochen werden soll. Jene Voraussetzung heißt auch hier die Hypothesis, diese Foderung die Thesis.

Zur Vollständigkeit der Aufgabe gehört sowohl die Auflösung, als der Beweis.

Auflösung heißt die Art und Weise, wie man verfahren muß, um der Foderung der Aufgabe zu entsprechen.

Beweis ist hier die Verbindung von Wahrheiten, wodurch der Verstand von der Richtigkeit der Auflösung überzeugt wird.

Auch diese allgemeine Begriffe sollen durch ein leichtes Beyspiel erläutert werden.

Aufgabe.

Ein gleichschenkeliges Dreyeck zu construiren, worin jeder der beyden gleichen Schenkel eine gegebene Größe hat.

Hier ist:

a) Hypothesis, die Voraussetzung einer gegebenen geraden Linie, und

b) Thesis, die Construction eines gleichschenkeligen Dreyecks, worin jeder der gleichen Schenkel der gegebenen geraden Linie gleich ist.

Auflösung.

1) Man construire eine gerade Linie ab, welche der gegebenen gleich ist,

2) Aus a ziehe man eine gerade af von unbestimmter Größe nach einer Richtung, welche weder mit ab, noch mit der über a verlängerten ba einerley ist,

3) Auf af nehme man ac = ab und ziehe die gerade Verbindungslinie cb, so ist cab das verlangte Dreyeck.

B e w e i s.

Zufolge der Auflösung ist ca = ab, folglich hat das Dreyeck cab zwey gleiche Seiten. Ein Dreyeck, welches zwey gleiche Seiten hat, heißt aber ein gleichschenkeliges. Daher ist cab ein gleichschenkeliges Dreyeck. Da nun auch jeder dieser Schenkel der gegebenen Linie gleich ist, so ist die Aufgabe aufgelöset.

Zusätze oder Corollarien heißen alle jene Sätze, welche aus den bewiesenen Lehrsätzen und Aufgaben auf so einfache Weise folgen, daß sie als leichte Folgerungen davon angesehen werden können, und deshalb keines Beweises bedürfen.

Erläuterungen darüber sind leicht beyzubringen.

S c h l u ß w o r t.

Sind die Schüler, nach dem Geiste dieser Methode, bis hierher geleitet, so können sie mit dem beßten Erfolge in das eigentliche Gebiet der Geometrie eingeführt werden. Besitzt der Lehrer die nöthige Sachkenntniß und Fertigkeit im Vortrage, so kann jedes gute Compendium zum Leitfaden dienen. Doch wird man auch hier stufenmäßig fortschreiten, und zuerst nur die Elementarlehren der Planimetrie vortragen müssen. Der Verfasser gegenwärtiger Anschauungslehre hat eine solche Elementargeometrie (Geometrische Wissenschaftslehre. Eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Geometrie. Mit sechs Steintafeln. Zweyte Auflage Mainz, bey Florian Kupferberg, 1819. XXX und 234 S. 8. 20 ggr. oder 1. fl. 30 kr.) nach seinem eigenthüm-

lichen Plane bearbeitet, bereits herausgegeben. Sie bildet mit dieser Anschauungslehre ein zusammenhängendes Ganzes. Auch kann die geometrische Constructionslehre des scharfsinnigen und im reingeistigen Vortrage der Geometrie sehr geübten Herrn Hofraths Ladomus in Carlsruhe bestens empfohlen werden. Was nun die Körperlehre oder Stereometrie betrifft, so sind ihre Elementarlehren in einem Bändchen unter dem Titel: Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre. Eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Stereometrie. Mit acht Steintafeln. Mainz, 1820. XVI und 224 S. 8. 20 ggr. oder 1 fl. 30 kr., nach gleichem Plane bearbeitet und in demselben Verlage, bereits erschienen; so, daß mit diesen drey Bändchen das gesammte Gebiet der geometrischen Grundlehren abgeschlossen ist.

Der Ladenpreiß dieses Werkchens ist: 15 ggr. oder 1 fl. 8 kr.

Anhang
zur
geometrischen Anschauungslehre
von
Joh. Jos. Ign. Hoffmann.

Dialogische Bearbeitung
des
ersten Cursus.

Kurze Uebersicht
des
ersten Cursus.

Tafel 1.

Oben: Punct. Mitten: Gerade Linie. Unten: Krumme Linie.

Tafel 2.

Oben: Zwey gerade Linien. Mitten: Zwey krumme Linien. Unten: Zwey gerade Linien und eine krumme Linie.

Tafel 3 und 4.

Oben: Zwey ungleiche gerade Linien, eine größere und eine kleinere. Mitten und Unten: Zwey gleiche gerade Linien.

Tafel 5.

Oben: Rechter Winkel. Mitten: Spitzer Winkel. Unten: Stumpfer Winkel. Bemerkung der Schenkel und des Scheitels.

Tafel 6 und 7.

Oben: Rechter Winkel mit ungleichen Schenkeln Mitten: Spitzer Winkel mit ungleichen Schenkeln. Unten: Stumpfer Winkel mit ungleichen Schenkeln.

Tafel 8.

Oben: Zwey gleiche spitze Winkel. Mitten: Zwey ungleiche spitze Winkel, rechts der kleinere, links der größere. Unten: Zwey ungleiche spitze Winkel, rechts der größere, links der kleinere.

Tafel 9.

Oben, Mitten und Unten: rechte Winkel. Alle rechte Winkel sind gleich, denn ihre Schenkel haben gleiche Neigung und gleiche Oeffnung.

Tafel 10.

Oben: Zwey gleiche stumpfe Winkel. Mitten: Zwey ungleiche stumpfe Winkel; rechts der größere, links der kleinere. Unten: Zwey ungleiche stumpfe Winkel, oben der größere, unten der kleinere.

Tafel 11.

Oben: Rechts ein spitzer, links ein rechter Winkel. Der spitze Winkel ist kleiner, als der rechte. Mitten: rechts ein stumpfer, links ein rechter Winkel. Der stumpfe Winkel ist größer, als der rechte. Unten: Rechts ein stumpfer, links ein spitzer Winkel. Der stumpfe Winkel ist größer, als der spitze.

Tafel 12.

Oben: Rechts ein stumpfer, links ein spitzer Winkel. Der größere Winkel hat hier kleinere, der kleinere Winkel größere Schenkel. Mitten: Oben stumpfer Winkel, unten spitzer Winkel. Der größere Winkel hat kleinere, der kleinere Winkel aber größere Schenkel. Unten: Oben rechter Winkel mit größern Schenkeln, unten stumpfer Winkel mit kleinern Schenkeln. Die Größe eines Winkels besteht nicht in der Größe seiner Schenkel, sondern in der Größe ihrer Neigung zu einander. Oder: die Größe eines Winkels hängt von der Größe seiner Oeffnung ab.

Tafel 13.

Oben: Zwey Nebenwinkel, rechts der spitze, links der stumpfe Winkel. Mitten: Auch zwey Nebenwinkel, rechts der größere, links der kleinere. Unten: Zwey Nebenwinkel, deren jeder ein rechter ist.

Tafel 14.

Oben: Zwey Paare von Scheitelwinkeln; ein Paar spitze Scheitelwinkel (rechts oben und links unten) und ein Paar stumpfe Scheitelwinkel (links oben und rechts unten). Scheitelwinkel sind gleich. Diese zwey Paare von Scheitelwinkeln bilden vier Paare von Nebenwinkeln. Mitten: Ebenfalls zwey Paare Scheitelwinkel, nur in veränderter Lage der einen geraden Linie. Unten: Scheitelwinkel, die alle rechte Winkel sind.

Tafel 15.

Oben: Zusammenlaufende Linien (nach der Rechten) und auseinanderlaufende Linien (nach der Linken); Mitten: Ebenso, nur mit verwechselter Lage. Unten: Gleichlaufende Linien.

Tafel 16.

Oben: Drey gleiche gerade Linien. Mitten: Zwey gleiche gerade Linien oben, eine ungleiche kleinere unten. Unten: Zwey gleiche gerade Linien oben und unten, eine kleinere mitten.

Tafel 17, 18, 19 und 20.

Zwey gleiche und eine ungleiche (kleinere) gerade Linie in verschiedenen Lagen. Ebenso auch drey gleiche gerade Linien.

Tafel 21.

Oben: Drey gleiche gerade Linien in Verbindung zu zwey stumpfen Winkeln. Mitten: zwey gleiche und eine

ungleiche gerade Linie ebenso. Unten: Zwey gleiche gerade Linien, die mit einer dritten kleinern zwey ungleiche stumpfe Winkel bilden.

Tafel 22.

Oben: Drey gleiche gerade Linien bilden zwey ungleiche stumpfe Winkel. Mitten: Zwey gleiche und eine ungleiche kleinere bilden einen spitzen und einen stumpfen Winkel. Unten: Zwey gleiche gerade Linien und eine kleinere bilden zwey spitze Winkel.

Tafel 23.

Zeigt ähnliche Verbindungen von drey Linien, deren mittlere die größere ist. Die beyden äußern sind kleiner und einander gleich.

Tafel 24.

Drey gerade Linien, wovon eine die größte, eine die mittlere, und eine die kleinste ist. Die Lage einer jeden läßt sich oben, mitten und unten leicht bestimmen.

Tafel 25, 26 und 27.

Zeigt drey ungleiche gerade Linien in verschiedenen Lagen, die jedesmal (oben, mitten und unten) leicht zu bestimmen sind.

Tafel 28, 29, 30 und 31.

Enthält drey ungleiche gerade Linien in Winkelverbindungen; wobey sowohl diese Winkel, als die Schenkel, die sie bilden, nach ihrer Größe leicht benennt werden können.

Tafel 32.

Oben: Gleichseitiges Dreyeck. Mitten: Gleichschenkeliges Dreyeck. Unten: Ungleichseitiges Dreyeck.

Tafel 33 und 34.

Oben: Rechtwinkeliges Dreyeck. Mitten: Spitzwinkeliges Dreyeck. Unten: Stumpfwinkeliges Dreyeck.

Tafel 35.

Oben: Quadrat. Mitten: Rechteck. Unten: Raute.

Tafel 36.

Oben: Rhomboide. Mitten: Paralleltrapez. Unten: Trapez.

Tafel 37 und 38.

Eben diese sechs Vierecke der beyden vorigen Tafeln in andern Lagen.

Tafel 39.

Oben: Das Rechteck mit einer Diagonallinie (Querlinie). Mitten: die Rhomboide mit einer Diagonallinie. Unten: Das Trapez mit einer Diagonallinie.

Tafel 40.

Oben: Regelmäßiges Fünfeck. Polygonwinkel. Mittelpunct. Mitten: Regelmäßiges Sechseck. Polygonwinkel. Mittelpunct. Unten: Regelmäßiges Siebeneck. Polygonwinkel. Mittelpunct.

Tafel 41.

Oben: Unregelmäßiges Fünfeck. Mitten: Unregelmäßiges Sechseck. Unten: Unregelmäßiges Siebeneck.

Tafel 42.

Oben: Kreis und Mittelpunct. Mitten: Halbmesser. Unten: Durchmesser.

Tafel 43.

Oben: Sehne. Mitten: Halbkreis. Unten: Quadrant.

Tafel 44.

Oben: Kleinere Sehne, größere Sehne, Tangente. Mitten: Ausschnitt. Unten: Abschnitt; größerer und kleinerer Abschnitt.

Tafel 45.

Oben: Ein in den Kreis beschriebenes Dreyeck. Ein um das Dreyeck beschriebener Kreis. Mitten: Ein in das Dreyeck beschriebener Kreis. Ein um den Kreis beschriebenes Dreyeck. Unten: Ein in den Kreis beschriebenes Viereck. Ein um das Viereck beschriebener Kreis.

Tafel 46.

Oben: Ein in das Viereck beschriebener Kreis. Ein um den Kreis beschriebenes Viereck. Mitten: Ein in den Kreis beschriebenes Fünfeck. Ein um das Fünfeck beschriebener Kreis. Unten: Ein in das Fünfeck beschriebener Kreis. Ein um den Kreis beschriebenes Fünfeck.

Hier heißt auch der in das Viereck beschriebene Kreis der eingeschriebene Kreis; das um den Kreis beschriebene Fünfeck das umschriebene Fünfeck. Aehnliche Benennungen gelten von den übrigen Zeichnungen dieser Tafeln 45 und 46.

Wirkliche Ausführung des ersten Cursus.

Lehrer. Seht her, Kinder! auf diese schwarze Tafel. Sie ist von Oben nach Unten in drey Gefache getheilt. Dieses: (darauf deutend) heißt das obere, Dieses: das mittlere und dieses: das untere. Auf diese drey Gefache werde ich nun, mit einem Stücke zugespitzter Kreide, allerley Zeichnungen machen, die Euch Freude verursachen und in der Folge sehr nützlich seyn werden. Ehe ich aber damit den Anfang mache, müßt Ihr diese drey Gefache wohl von einander zu unterscheiden, und jedes sehr schnell und sicher zu benennen wissen. Da dieses Gefach (darauf zeigend) das obere ist, so wollen wir es mit dem Worte: Oben bezeichnen. Dieses mittlere heißt: Mitten, und dieses untere nennen wir: Unten. Damit ich nun sehe, ob Ihr dieses recht wohl gefaßt habt, so will ich auf eines dieser

Fächer mit dem Zeiger deuten, und Ihr alle werdet mir solches mit vernehmlicher, doch nicht allzulauter, Stimme benennen. (Der Lehrer nimmt nun diese Uebung so lange vor, bis den Schülern die Benennung jedes Faches vollkommen geläufig ist. Nach diesem fährt er folgendermaßen fort.)

Lehrer. Da Ihr dieses nun wohl gefaßt habt, so wollen wir etwas Neues vornehmen. Diese Tafel kann, wie Ihr sehet, um ihre Mitte ganz herumgedreht werden (drehet sie wirklich um). Ich kann sie so stellen, daß die drey Gefache, welche zuvor übereinander standen, nunmehr nebeneinander stehen (stellt sie durch eine Viertelsumdrehung in diese Lage.) Jetzt seht Ihr deutlich, daß dieses Gefach (darauf deutend) in der Mitte, dieses zur Rechten und dieses zur Linken ist. Um sie in dieser Lage ebenfalls kurz und schnell zu benennen, heissen wir dieses (darauf weisend): Rechts, dieses: Mitten und dieses: Links. Nun laßt uns sehen, ob Ihr im Stande seyd, jedes dieser Fächer geschwind und richtig zu bezeichnen. (Der Lehrer stellt nun ähnliche Uebungen darüber an, wie vorher, und setzt sie so lange fort, bis die Schüler ohne Anstoß und richtig antworten).

Anmerkung. Zur kürzeren Bezeichnung wollen wir die erste Lage der Tafel immer die lothrechte, die zweyte die waagrechte nennen.

Tafel 1 und 2.

(Sie dienen zur Anschauung vom Puncte, von der geraden und krummen Linie.

Lehrer. Nach diesen Vorbereitungen können wir unsere Zeichnungen selbst anfangen (er stellt die Tafel lothrecht und macht in drey Fächer die Zeichnungen von Nro 1). Nun, schaut her! Das, was Ihr hier (auf den Punct deutend) sehet, heißt man: Punct.

Lehrer. Nun sagt mir Alle zugleich: wie heißt das? (darauf weisend).

Schüler. (Antworten Alle mit vernehmlicher Stimme) Punct.

Lehrer. Wenn ich Euch nun frage: Wo ist der Punct? Was werdet Ihr antworten?

Schüler. (Wie vorhin) Oben.

Lehrer. Gut. Da Ihr nun den Punct kennt, so sollt Ihr etwas Neues lernen. Sehet Alle daher (auf die gerade Linie deutend) das hier heißt: gerade Linie. Jetzt sagt mir wieder Alle: wie heißt das?

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Nun sagt mir auch wieder: wo ist die gerade Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Recht. Jetzt seht Alle aufmerksam in dieses Fach: (deutend) Das, was hier gezeichnet ist, nennt man: krumme Linie. Merket dies wohl und antwortet mir nun Alle zugleich: wie heißt das?

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. Wohl. Gewiß könnt Ihr mir nun auch richtig antworten, wenn ich frage: wo ist die krumme Linie?

Schüler. Unten.

Lehrer. Damit wir nun sehen, ob Euch Alles recht klar und geläufig ist, so wollen wir diese Tafel halb umdrehen (thut dieses, so daß der Punct unten steht). Nun sehet Alle hieher (auf Oben deutend) und sagt mir: wie heißt das?

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. So ists Recht. Aber wie nennt man das? (Auf die Mitte deutend).

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Gut, und was ist hier? (auf Unten).

Schüler. Punct.

Lehrer. Wenn ich nun frage: wo ist der Punct?

Schüler. Unten.

Lehrer. Wo ist die gerade Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Recht. Aber wo ist die krumme Linie?

Schüler. Oben.

Lehrer. Nun laßt uns die Tafel nochmals drehen. (Er stellt sie so, daß der Punct zur Rechten ist). Sagt mir jetzt Alle (auf Rechts deutend) wie heißt das?

Schüler. Punct.

Lehrer. Und wie nennt ihr das? (auf Mitten)

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Und wie heißt das? (auf Links)

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. Richtig. Nun sagt mir aber auch: wo steht der Punct?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo seht Ihr die gerade Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Und wo ist die krumme Linie?

Schüler. Links.

Lehrer. Da ihr das Alles wisset, so laßt uns die Tafel wiederum drehen. (Er stellt den Punct zur Linken, und fragt, Rechts deutend) Wie nennt Ihr das?

Schüler. Krumme Linie.

Lehrer. Wie das? (Mitten)

Schüler. Gerade Linie.

Lehrer. Und dies? (Links)

Schüler. Punct.

Lehrer. Wohl. Nun sagt mir noch: Wo erblickt Ihr die krumme Linie?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo die gerade?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Und den Punct?

Schüler. Links.

(Nun folgen Wiederholungsfragen, indem der Lehrer auf die verschiedenen Zeichnungen, ohne bestimmte Ordnung zu halten und in jeder Lage der Tafel, hindeutet, und sich bey jeder Zeichnung den Namen sagen läßt. Sodann spricht er selbst diese Namen aus, und die Schüler müssen den Ort nen-

nen, an welchem sich die entsprechenden Zeichnungen befinden. Diese Uebungen werden so lange fortgesetzt, bis den Schülern sowohl das Benennen als das Auffinden im höchsten Grade geläufig ist; eine Fertigkeit, welche sich die Schüler bald erworben haben. Der Lehrer schreite aber ja nicht eher zur folgenden Tafel, bis die vorhergehende vollkommen eingeübt ist).

Anmerk. Bey dem Privatunterrichte, für einen oder einige Schüler, fällt die große Schultafel hinweg, und die kleinen Anschauungstäfelchen sind hinreichend zur Erklärung und Wiederholung.

Lehrer. Nun Kinder! sollt Ihr etwas Neues kennen lernen. Seht mir zu, wie ich Euch andere Zeichnungen in die Gefache der Tafel mache. (Nachdem er Nro. 2 gezeichnet hat, fährt er fort). Wie viele Linien seht Ihr hier? (auf Oben deutend.)

Schüler. Zwey.

Lehrer. Sind es gerade Linien oder krumme?

Schüler. Gerade Linien.

Lehrer. Gut. Nun sagt mir auch, wie viele Linien hier (auf Mitten zeigend) stehen?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese zwey Linien?

Schüler. Krumme Linien.

Lehrer. Ihr habt Recht. Allein wie viele Linien erblickt Ihr da unten? (deutend).

Schüler. Drey Linien.

Lehrer. Sind es drey gerade?

Schüler. Nein.

Lehrer. Sind es drey krumme?

Schüler. Nein.

Lehrer. Was sind es denn, wenn es keine drey gerade und auch keine drey krumme Linien sind?

Schüler. { Zwey gerade Linien und eine krumme.
Eine krumme Linie und zwey gerade.

Lehrer. Das war recht geantwortet. Allein nun sagt mir auch: wo sind die zwey krumme Linien?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Wo stehen die beyden geraden Linien?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo seht Ihr die zwey geraden Linien nebst der krummen Linie?

Schüler. Unten.

(Ist dieses gehörig durchgeübt, so wird die Tafel um ein Viertheil gedreht, und eine ähnliche Doppelreihe von Fragen beantwortet. Eben dieses geschieht bey den zwey andern Viertelsumdrehungen derselben, die noch möglich sind. Die Ausführung davon würde hier allzuweitläufig seyn und bleibt folglich der Leitung des verständigen Lehrers überlassen, auf dessen Beurtheilung es hierbey immer ankömmt, zu bestimmen, wann seine Schüler dieser Uebungen nicht mehr bedürfen.)

(Zum Schlusse dieser Anschauung der geraden und krummen Linien noch eine sehr nützliche Uebung).

Lehrer. (stellt die Tafel wie sie anfangs war, deutet auf Oben und Mitten zugleich und fraget:) Wie viele Linien stehen Oben und Mitten zusammen?

Schüler. Vier Linien.

Lehrer. Sind es gerade oder nichtgerade Linien?

Schüler. Gerade und nichtgerade Linien.

Lehrer. Wie viele von jeder Art sind es?

Schüler. Zwey gerade und zwey nicht gerade Linien.

Lehrer. So ist es. Aber wer sagt mir von Euch: wie viele Linien auf der ganzen Tafel (von Oben bis Unten deutend) stehen?

Schüler. Sieben Linien.

Lehrer. Das ist recht. Allein wie viele gerade sind darunter?

Schüler. Vier gerade Linien.

Lehrer. Und wie viele krumme?

Schüler. Drey krumme Linien.

(Diese Uebungen können auch mit Mitten und Unten, ferner mit Oben und Unten zugleich angestellt werden. Eben so wiederum bey umgedrehter Tafel).

Lehrer. (Thut, um diese Uebung zu vollenden, noch folgende Fragen): Wo seht Ihr auf dieser ganzen Tafel vier Linien?

Schüler. Oben und Mitten.

Lehrer. Wo erblickt Ihr fünf Linien?

Schüler. Oben und Unten.

Lehrer. Wo noch mehr?

Schüler. Mitten und Unten.

Lehrer. Wo findet Ihr sieben Linien?

Schüler. Oben, Mitten und Unten.

Lehrer. Recht so. Zum Schlusse sagt mir noch: wo haben wir drey krumme Linien?

Schüler. Mitten und Unten.

Lehrer. Wo stehen vier gerade Linien?

Schüler. Oben und Unten.

(Diese Fragen können nach Bedürfniß erweitert werden).

Anmerk. Wenn es dem Lehrer bey seinen Schülern nöthig scheint, so zeichnet er andere krumme und gerade Linien in die drey Felder der Tafel, und setzt an diesen ähnliche Uebungen fort.

Tafel 3 und 4.

(Zwey gleiche und zwey ungleiche gerade Linien, die nicht verbunden sind).

Lehrer. (Nachdem er die Linien von Nro. 3 auf die Tafel gezeichnet hat.) Da Ihr nun die geraden und die krummen Linien kennt und zu unterscheiden wisset, so wollen wir einen Schritt weiter gehen, und die geraden Linien mit einander vergleichen. Jetzt, Schüler! seht Alle hierher (auf Oben deutend) und sagt mir, wie viele Linien seht Ihr hier?

Schüler. Zwey.

Lehrer. So ist es. Aber sind es gerade oder krumme Linien?

Schüler. Gerade Linien.

Lehrer. Nun betrachtet einmal beyde Linien sehr aufmerksam und sagt mir, ob eine so groß, als die andere ist?

Schüler. Nein.

Lehrer. Richtig. Welche ist aber die größere?

Schüler. Die obere.

Lehrer. Und welche ist die kleinere?

Schüler. Die untere.

Lehrer. Sind also diese zwey Linien gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Nun sagt mir noch: Wie heißt man die obere von diesen beyden Linien?

Schüler. Die größere.

Lehrer. Wie nennt Ihr die untere?

Schüler. Die kleinere.

Lehrer. Eure Antworten sind richtig. Nun sehet hierher (auf Mitten zeigend) und sagt: Wie viele Linien sind dies?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Sind sie gerade oder krumme Linien?

Schüler. Gerade.

Lehrer. Ist die eine größer, als die andere?

Schüler. Nein.

Lehrer. Sind diese zwey Linien also gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Gut. Aber nun schaut auch noch auf diese zwey Linien (Unten) und sagt mir: Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

(Der Lehrer drehet nun die Tafel herum und wiederholt diese Fragen so lange, bis die so wichtigen Anschauungen von gleichen und ungleichen geraden Linien den Schülern vollkommen klar geworden sind. Nach diesem werden die Uebungsfra-

gen auch an der Tafel 4 auf gleiche Weise durchgeführet).

Tafel 5, 6, 7 und 8.

(Anschauung des rechten, spitzen und stumpfen Winkels, der Schenkel und des Scheitels des Winkels.)

Lehrer. (Zeichnet nun Nro. 5 an die Schultafel, und fährt folgendergestalt in seinem Unterrichte fort.) Bisher haben wir zwey gerade Linien ganz abgesöndert von einander betrachtet. Nun, Schüler! will ich Euch lehren, was zum Vorschein kömmt, wenn man sie an ihren Enden zusammensetzt. Seyd aber achtsam, damit Euch alles recht klar werde. Wenn diese gerade Linie (auf Oben deutend) mit dieser hier so verbunden wird, wie es Euch der Augenschein lehret, so heißt das: rechter Winkel. Nun sagt mir Alle vernehmlich: Wie heißt das? (deutend)

Schüler. Rechter Winkel.

Lehrer. Was sagt Ihr, wenn ich frage: wo ist der rechte Winkel?

Schüler. Oben.

Lehrer. Da Ihr nun den rechten Winkel gesehen habt, so will ich Euch etwas Neues lehren. Sehet Alle hierher; (auf Mitten) Dies heißt: spitzer Winkel. Betrachtet es aufmerksam und sagt mir: wie heißt das?

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. So ist es. Aber wo steht der spitze Winkel?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Jetzt betrachtet noch diese untere Zeichnung (darauf weisend). Was Ihr hier sehet, heißt stumpfer Winkel. Sagt mir sogleich Alle: wie heißt das?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Wo steht denn der stumpfe Winkel?

Schüler. Unten.

(Die sehr nöthigen Wiederholungsfragen gehen genau nach dem Muster der, oben zu Tafel 1, gehörigen Fragen. Da der verständige Lehrer hieraus ihren Gang übersieht, so ist es hinreichend, darauf aufmerksam gemacht zu haben).

(Tafel 6 dient zur Wiederholung; Tafel 7 aber ist bestimmt, den Schülern die Benennungen von Schenkel und Scheitel des Winkels beyzubringen, d. h. durch die Anschauung klar zu machen. Der Unterricht nimmt dazu folgenden Gang.)

Lehrer. (Nachdem Nro. 7 auf die Tafel gezeichnet ist, deutet er auf Oben). Ihr wisset nun die verschiedenen Winkel von einander zu unterscheiden, und jeden einzelnen richtig zu benennen. Nun müßt Ihr Euch noch folgendes merken. Seht her! diese zwey gerade Linien, welche den Winkel bilden, heißen: die Schenkel des Winkels. Damit Ihr Euch dieses Wort sogleich einpräget, so sagt mir Alle: wie heißt man diese zwey gerade Linien (deutend), welche diesen Winkel bilden?

Schüler. Die Schenkel des Winkels.

(Diese Fragen werden nun, bey Mitten und Unten, wiederholt).

Lehrer. Nun betrachtet einmal diesen rechten Winkel (auf Oben deutend) und sagt: hat er zwey gleiche oder zwey ungleiche Schenkel?

Schüler. Zwey ungleiche.

Lehrer. Wo ist der größere Schenkel?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo der kleinere?

Schüler. Links.

Lehrer. Nun Kinder merkt Euch noch mehr, was ich sage. Dieser Ort (deutend), wo beyde Schenkel eines Winkels zusammenstoßen, heißt: Scheitel des Winkels. Nun will ich von Euch allen hören: wie heißt das? (deutend).

Schüler. Scheitel des Winkels. (Eben dieses bey Mitten und Unten.)

Lehrer. Wie viele Schenkel hat jeder Winkel?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Wie viele Scheitel hat jeder Winkel?

Schüler. Nur einen.

(Nun werden an diesen Zeichnungen, nach den vier Hauptrichtungen der Schultafel, die Anschauungen vom rechten, spitzen und stumpfen Winkel, von den Schenkeln des W., von dem größern und kleinern Schenkel und vom Scheitel so lange durchgeübt, bis den Schülern Alles klar und geläufig ist. Der Gang dieser Wiederholungsfragen liegt in den seitherigen Mustern.)

Tafel 8, 9, 10 u. 11.

(Anschauung von gleichen und ungleichen, von größern und kleinern Winkeln.)

Lehrer. Aus unserm frühern Unterrichte habt Ihr gelernt, zwey gleiche oder zwey ungleiche gerade Linien durch das blose Anschauen zu erkennen. Gleichwie es nun gleiche und ungleiche gerade Linien gibt, so gibt es auch gleiche und ungleiche Winkel. Was man gleiche, und was man ungleiche Winkel nennt, will ich Euch heute zeigen. Aber seyd aufmerksam auf das, was Ihr sehen und von mir hören werdet. (Er zeichnet No. 8 an die Tafel, deutet auf Oben und spricht) Seht her, und sagt: wie viele Winkel stehen hier?

Schüler. Zwey.

Lehrer. Richtig. Sind es rechte, spitze oder stumpfe Winkel?

Schüler. Spitze Winkel.

Lehrer. So ist es. Allein jetzt betrachtet einmal diese Oeffnungen (deutend) der beyden Winkel genau und sagt mir: sind beyde Winkel gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Recht, denn beyde haben gleiche Oeffnungen ihrer Schenkel. Nun beschaut einmal diese zwey Winkel (auf Mitten) und sagt: sind es stumpfe, spitze oder rechte Winkel?

Schüler. Spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Aber jetzt betrachtet wieder beyde Winkel gegen einander. Was glaubt Ihr nun? Sind diese zwey Winkel gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Getroffen; denn sie haben ungleiche Oeffnungen ihrer Schenkel. Aber wo ist der größere?

Schüler. Links.

Lehrer. Richtig. Und wo steht der kleinere?

Schüler. Rechts.

Anmerk. Sollte den Schülern durch die blose Zeichnung die Anschauung von der Gleichheit, dem Größer- und Kleinerseyn zweyer Winkel noch nicht recht einleuchten wollen (wie dies bey einigen minder fähigen der Fall seyn könnte) so nehme der Lehrer vier, etwa zwey Fuß lange, dünne Holzstäbchen, wovon je zwey an ihren Enden charnierartig verbunden sind. Mit dieser einfachen Vorrichtung läßt sich nun recht deutlich zeigen, daß die Größe eines Winkels von der Größe der Oeffnung seiner Schenkel abhänge. Auch das Größer- und Kleinerseyn der Winkel springt hier sehr klar in die Augen.

Lehrer. Nun seht noch hierher (auf Unten deutend) und saget: was sind dies für zwey Winkel?

Schüler. Zwey spitze Winkel.

Lehrer. Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Richtig. Aber wo ist der größere?

Schüler. Rechts.

Lehrer. Wo der kleinere?

Schüler. Links.

(Nun wird die Tafel, nach und nach, in die drey andere Hauptstellungen gebracht, und in jeder

Stellung nach dem größern und kleinern Winkel, oder nach den gleichen Winkeln gefragt. Wie diese Wiederholungsfragen zu geben sind, weiß der verständige Lehrer schon aus der frühern Anleitung und braucht hier nicht weiter auseinandergesetzt zu werden.)

(Eben dieser Cyclus von Fragen wird an den Zeichnungen der Tafel 9 durchgeführt, und am Schlusse dieser Betrachtung muß der Schüler durch die blose Anschauung wissen, daß alle rechte Winkel einander gleich sind.)

(Auf gleiche Weise wird die Tafel 10 behandelt und für den stumpfen Winkel durchgeführt.)

(Die Tafel 11 vergleichet: rechte, spitze und stumpfe Winkel unter sich selbst, und stellt je zwey davon zusammen. Sie gibt zu folgender Uebung Veranlassung.)

Lehrer. (Nachdem er sie aufgezeichnet und auf Oben gedeutet) Wie viele Winkel stehen hier?

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Wie heißt der zur Rechten stehende Winkel?

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Und der zur Linken?

Schüler. Rechter Winkel.

Lehrer. Sind beyde Winkel gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Aber ist der spitze Winkel größer oder kleiner als der rechte Winkel?

Schüler. Kleiner.

Lehrer. So ist es. Wenn ich Euch nun anstatt dieses spitzen Winkels (deutend) einen andern spitzen herzeichne. (thut dieses) Ist nun dieser spitze auch kleiner, als dieser rechte Winkel?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ihr habt Recht. Wenn ich nun so fortfahre, immer andere und andere spitze Winkel für diesen zu zeichnen, und Euch immer frage: Ist der rechte Winkel größer oder kleiner, als dieser spitze Winkel? Was werdet ihr antworten?

Schüler. { Der spitze Winkel ist kleiner.
Der rechte Winkel ist größer.

Lehrer. Recht so. Ist daher jeder rechte Winkel größer, als jeder spitze Winkel?

Schüler. Ja.

Lehrer. Muß nicht jeder spitze Winkel kleiner, als ein rechter Winkel seyn?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ist ein spitzer Winkel so groß, als der andere?

Schüler. Nein.

(Auf gleiche Art wird nun in dem mittlern Felde der Tafel der stumpfe Winkel mit dem rechten verglichen und zuletzt auf dem untern Felde der spitze mit dem stumpfen Winkel. Sodann folgen noch diese Schlußfragen.)

Lehrer. Wenn Ihr einen rechten Winkel und einen spitzen Winkel sehet: welcher ist der größere?

Schüler. Der rechte Winkel.

Lehrer. Welcher ist der kleinere von beyden?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Richtig. Aber wenn Ihr einen rechten und einen spitzen Winkel habt, wie nennt ihr den rechten Winkel in Vergleichung mit dem spitzen Winkel?

Schüler. Den größern.

Lehrer. Und wie heißt der spitze in Rücksicht des rechten Winkels?

Schüler. Der kleinere.

(Eben diese Fragen für den rechten und stumpfen Winkel, und sodann noch für den spitzen und stumpfen Winkel.)

Lehrer. Nun gebt wohl Acht auf das, was ich Euch sage. Wenn Ihr einen stumpfen Winkel, einen rechten und einen spitzen Winkel sehet, welcher ist der größte von ihnen?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Recht gut. Aber welcher ist der kleinste?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Sagt nun auch, wie derjenige Winkel heißt, welcher kleiner als der stumpfe, und größer als der spitze Winkel ist?

Schüler. Der rechte Winkel.

Lehrer. Recht so. Der rechte Winkel heißt also hier der mittlere, denn er steht an Größe zwischen dem stumpfen und spitzen Winkel. Ist's nicht so?

Schüler. Ja.

Lehrer. Wenn Ihr nun wieder einen stumpfen, einen rechten und einen spitzen Winkel sehet, wie nennt Ihr den stumpfen?

Schüler. Den größten.

Lehrer. Wie heißt jetzt der spitze?

Schüler. Der kleinste.

Lehrer. Und wie nennt Ihr den rechten Winkel?

Schüler. Den mittlern.

(Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß der Lehrer, wenn er es bey seinen Schülern nöthig findet, die Tafel waagrecht stellen, in ihre drey Felder den stumpfen, rechten und spitzen Winkel verzeichnen und seine Fragen, unter Leitung dieser Anschauungen, so lange wiederholen kann, bis Alles gehörig eingeübt ist.

Tafel 12.

(Der Zweck dieser zwölften Tafel ist, die Schüler aufmerksam zu machen, daß die Größe eines Winkels nicht in der Größe seiner Schenkel, sondern in der Größe der Oeffnung dieser Schenkel bestehe.)

Lehrer. (Nachdem er Nro. 12 auf die Tafel gezeichnet hat) Nun, Schüler! betrachtet einmal hier oben (deutend) den Winkel zur Rechten. Wie heißt er?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Wie heißt der Winkel zur Linken hier? (deutend.)

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Gut. Welcher ist aber der größere von beyden?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Und der kleinere?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Richtig. Aber wenn Ihr einen rechten und einen spitzen Winkel habt, wie nennt ihr den rechten Winkel in Vergleichung mit dem spitzen Winkel?

Schüler. Den größern.

Lehrer. Und wie heißt der spitze in Rücksicht des rechten Winkels?

Schüler. Der kleinere.

(Eben diese Fragen für den rechten und stumpfen Winkel, und sodann noch für den spitzen und stumpfen Winkel.)

Lehrer. Nun gebt wohl Acht auf das, was ich Euch sage. Wenn Ihr einen stumpfen Winkel, einen rechten und einen spitzen Winkel sehet, welcher ist der größte von ihnen?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Recht gut. Aber welcher ist der kleinste?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Sagt nun auch, wie derjenige Winkel heißt, welcher kleiner als der stumpfe, und größer als der spitze Winkel ist?

Schüler. Der rechte Winkel.

Lehrer. Recht so. Der rechte Winkel heißt also hier der mittlere, denn er steht an Größe zwischen dem stumpfen und spitzen Winkel. Ist's nicht so?

Schüler. Ja.

Lehrer. Wenn Ihr nun wieder einen stumpfen, einen rechten und einen spitzen Winkel sehet, wie nennt Ihr den stumpfen?

Schüler. Den größten.

Lehrer. Wie heißt jetzt der spitze?

Schüler. Der kleinste.

Lehrer. Und wie nennt Ihr den rechten Winkel?

Schüler. Den mittlern.

(Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß der Lehrer, wenn er es bey seinen Schülern nöthig findet, die Tafel waagrecht stellen, in ihre drey Felder den stumpfen, rechten und spitzen Winkel verzeichnen und seine Fragen, unter Leitung dieser Anschauungen, so lange wiederholen kann, bis Alles gehörig eingeübt ist.

Tafel 12.

(Der Zweck dieser zwölften Tafel ist, die Schüler aufmerksam zu machen, daß die Größe eines Winkels nicht in der Größe seiner Schenkel, sondern in der Größe der Oeffnung dieser Schenkel bestehe.)

Lehrer. (Nachdem er Nro. 12 auf die Tafel gezeichnet hat) Nun, Schüler! betrachtet einmal hier oben (deutend) den Winkel zur Rechten. Wie heißt er?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Wie heißt der Winkel zur Linken hier? (deutend.)

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Gut. Welcher ist aber der größere von beyden?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Und der kleinere?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Wohl. Aber nun sagt mir auch: Haben beyde Winkel gleiche oder ungleiche Schenkel?

Schüler. Ungleiche Schenkel.

Lehrer. Welcher W. hat die größern Schenkel?

Schüler. Der spitze Winkel.

Lehrer. Und welcher hat die kleinern Schenkel?

Schüler. Der stumpfe Winkel.

Lehrer. Hat wohl hier (deutend) der größere Winkel auch größere Schenkel, als der kleinere Winkel?

Schüler. Nein.

Lehrer. Was für Schenkel hat denn der größere Winkel?

Schüler. Kleinere Schenkel.

Lehrer. Hat etwa dieser kleinere Winkel (deutend) auch kleinere Schenkel, als der größere Winkel?

Schüler. Nein.

Lehrer. Welche Schenkel hat denn der kleinere Winkel?

Schüler. Größere Schenkel.

(Eine ähnliche Reihe von Fragen wird nun bey dem mittleren und untern Felde dieser Tafel durchgeführt; auch die Schultafel in andere Lagen versetzt. Die Schlußfrage ist folgende):

Lehrer. Hängt also die Größe eines Winkels von der Größe seiner Schenkel ab, oder von der Größe seiner Oeffnung?

Schüler. Von der Größe seiner Oeffnung.

Tafel 13 und 14.

(Diese Tafeln Nro. 13 und 14 dienen, um die Anschauungen von Nebenwinkeln und Scheitelwinkeln klar zu machen, und der Unterricht nimmt folgenden Gang.)

Lehrer. Seither haben wir die Winkel theils einzeln, theils in Vergleichung zusammen betrachtet. Nun will ich Euch zeigen, auf welche Weise zwey oder vier Winkel ganz einfach zusammen verbunden sind. (Er zeichnet Nro. 13 an die Tafel und deutet in das obere Gefach) Sehet einmal her, ihr Schüler! betrachtet diese Linien genau, und sagt mir: sehet Ihr einen einzigen Winkel oder mehr als einen?

Schüler. Mehr als einen.

Lehrer. Wie viele Winkel stehen denn da?

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Richtig. Wie heißt der Winkel zur Rechten?

Schüler. Spitzer Winkel.

Lehrer. Und der zur Linken?

Schüler. Stumpfer Winkel.

Lehrer. Nun merket wohl, was ich sage: Solche Winkel, wie diese hier, welche an einer geraden Linie neben einander liegen, (deutend) heißen Nebenwinkel. Nun sagt mir Alle, wie nennt man diese Winkel?

Schüler. Nebenwinkel.

(Auf gleiche Weise werden diese Fragen in den Zeichnungen auf dem mittlern und untern Felde

durchgeführt. Sodann wird die Schultafel in alle Hauptstellungen gebracht, und diese Uebung immer wiederholt. Bey dem wagrechten Stande der Tafel heißt der eine Winkel der untere, der andere der obere.)

Lehrer. (Der die Zeichnungen Nro. 14 auf die Tafel gebracht hat) Nun, Schüler! betrachtet einmal diese Zeichnung (auf oben deutend) recht scharf, und sagt mir: wie viele Winkel Ihr rings um diesen Punct (deutend) erblicket?

Schüler. Vier Winkel.

Lehrer. Recht so. Wie viele Winkel liegen oberhalb dieser Linie? (auf die wagrechte zeigend, und die untere mit dem Zeiger bedeckend.)

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Und wie viele sind unter derselben? (die obere bedeckend.)

Schüler. Auch zwey.

Lehrer. Wie heißen diese zwey obere Winkel zusammen?

Schüler. Nebenwinkel.

Lehrer. Richtig. Und die beyden untern zusammen?

Schüler. Auch Nebenwinkel.

(Eben so werden die Schüler auf die zwey Nebenwinkel zur Rechten, und auf die zwey Nebenwinkel zur Linken geleitet.)

Lehrer. Wie viele Nebenwinkel seht Ihr also hier an der Zeichnung?

Schüler. Vier Nebenwinkel.

Lehrer. Wohl. Sagt mir nun auch, wo sie stehen? Aber fanget dabey oben an, und gehet zur Rechten herum.

Schüler. Oben stehen zwey Nebenwinkel; zur Rechten stehen zwey Nebenwinkel; unten stehen zwey Nebenwinkel; und zur Linken stehen zwey Nebenwinkel.

Lehrer. So war's recht. Aber nun betrachtet einmal diesen spitzen Winkel, (oben rechts zeigend) schaut Euch überall um, und sagt mir: ob Ihr nicht einen andern gefunden habt, der ihm gleich ist?

Schüler. Ja.

Lehrer. Aber sagt mir auch: wo dieser andere steht?

Schüler. Unten zur Linken.

Lehrer. Sehr gut. Nun betrachtet auch hier diesen stumpfen Winkel; (unten rechts deutend) suchet aufmerksam, und sagt mir: Ist noch ein stumpfer Winkel da?

Schüler. Jawohl.

Lehrer. Wo seht ihr diesen andern?

Schüler. Oben zur Linken.

Lehrer. Recht gut. Nun bemerket auch wohl, was ich Euch sage. Von den vier Winkeln, welche rings um diesen Punct (deutend) her liegen, nennt man diejenigen zwey, welche einander gleich sind, Scheitelwinkel; Sagt mir jetzt Alle: wie heißen diese beyde Winkel? (auf die spitzen zeigend.)

Schüler. Scheitelwinkel.

Lehrer. Und wie nennt man diese zwey stumpfe Winkel? (deutend.)

Schüler. Auch Scheitelwinkel.

Lehrer. Sind also die Scheitelwinkel einander gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

(Diese Fragen werden nun an den Zeichnungen auf dem mittlern und untern Felde eben so durchgeführt, woben der Lehrer sodann auch die Tafel in verschiedene Stellungen bringt. Den Beschluß dieser Betrachtung machen folgende Fragen:

Lehrer. (Auf den spitzen Winkel zur Linken im obern Fache deutend.) Nun sagt mir, Schüler! wo ist von diesem Winkel der Scheitelwinkel?

Schüler. Rechts oben.

Lehrer. Gut. Und wo steht der Scheitelwinkel von diesem? (Rechts oben deutend.)

Schüler. Links unten.

Lehrer. (Setzt diese Fragen nach den zwey noch möglichen Fällen fort, und verbindet sodann die Anschauung des Nebenwinkels mit der des Scheitelwinkels auf folgende Weise.) Betrachtet einmal diesen stumpfen Winkel, (links oben deutend) und sagt mir: wie viele Nebenwinkel hat er?

Schüler. Zwey Nebenwinkel.

Lehrer. Wo steht denn sein oberer Nebenwinkel?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Gut. Und wo der untere?

Schüler. Zur Linken.

(Auch diese Uebungen werden so lange getrieben, bis dem Schüler Alles dieses geläufig ist.)

Tafel 15.

Lehrer. (Nachdem er die Zeichnung Nro. 15 auf die Tafel gebracht hat.) Jetzt, ihr Schüler! wollen wir zwey gerade Linien noch auf eine andere Art betrachten. Seyd Ihr recht aufmerksam auf das, was Ihr sehen und von mir hören werdet, so steigen wir bald eine Stufe höher, nämlich zur Betrachtung von drey geraden Linien. Seht einmal diese zwey gerade Linien (oben deutend) an, und sagt mir: ob der Weg von diesem Ende (rechts deutend) zu diesem kürzer oder länger ist, als der Weg von diesem Ende (links deutend) zu diesem?

Schüler. Kürzer.

Lehrer. Sind also diese zwey gerade Linien an ihren Enden gleichweit, oder ungleichweit von einander entfernt?

Schüler. Ungleichweit.

Lehrer. An welchen Enden ist diese Entfernung kleiner; zur Rechten oder zur Linken?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Und wo ist die größere Entfernung dieser Enden?

Schüler. Zur Linken?

Lehrer. So ist es. Nun bildet Euch ein, ich mache beyde Linien gegen die Rechte größer, (verlängert sie wirklich um etwas) werden ihre Enden dadurch weiter von einander oder näher zusammenkommen, als sie zuvor waren?

Schüler Näher zusammen.

Lehrer. Recht so. Und wenn ich diese Linien

immer noch weiter fortziehe, (thut es wirklich, bis sie zusammenstoßen) werden sie einmal einander erreichen?

Schüler. Ja.

Lehrer. Nun merket wohl, was ich Euch sage. Solche gerade Linien, wie diese, (deutend) welche einmal zusammenstoßen, wenn man sie länger macht, heißen: Zusammenlaufende Linien. Wie heissen also diese zwey gerade Linien (deutend) weil sie einmal zusammenstoßen, wenn man sie zur Rechten größer macht?

Schüler. Zusammenlaufende Linien.

(Auf vollkommen ähnliche Weise werden die auseinanderlaufenden Linien, an den Enden zur Linken, aus der Anschauung entwickelt. Eben so auch die gleichlaufenden, als nicht zusammen- und nicht auseinanderlaufende Linien. Ist dieses nach den verschiedenen Stellungen der Tafel durchgeführt, so wird noch Folgendes beygefügt):

Lehrer. (Auf oben deutend) Nun könnt Ihr mir sicher folgende Fragen beantworten: Wenn diese Linien zur Rechten zusammenlaufende sind, was sind sie zur Linken?

Schüler. Auseinanderlaufende Linien.

Lehrer. Richtig. Wenn sie aber zur Rechten auseinanderlaufende sind, (auf Mitten) was sind sie zur Linken?

Schüler. Zusammenlaufende Linien.

Lehrer. Wohl. Wenn aber gerade Linien zur Rechten verlängert gleichlaufende sind, (auf unten) was sind sie zur Linken?

Schüler. Auch gleichlaufende Linien.

(Der Cyclus dieser Fragen wird nun auch bey der wagrechten Stellung der Tafel auf ähnliche Art wiederholt. Auch lassen sich noch folgende Fragen beyfügen: Wo sind die gleichlaufenden Linien? Wo die rechts zusammenlaufenden Linien? u. s. f. Auch umgekehrt: Was seht Ihr unten; oben; rechts? u. s. w. Sobald der Lehrer in den Geist dieser Anschauungsmethode eingedrungen ist, bieten sich Ihm solche Abwechslungen von selbst dar.)

Anmerkung. Es bedarf kaum einer Erinnerung, daß es sehr nützlich ist, alle frühere Verbinbungen von zwey geraden Linien wenigstens flüchtig zu wiederholen, ehe man zu den folgenden Uebungen schreitet.

Tafel 16, 17, 18, 19 und 20.

Lehrer. (Indem er Nro. 16 an die Tafel zeichnet) Da Ihr nun die nöthigsten Verbindungen von zwey geraden Linien kennet, so laßt uns zu etwas Neuem übergehen. Schaut einmal hieher (auf oben) und sagt mir: Wie viele Linien sind das?

Schüler. Drey.

Lehrer. Sind es gerade oder krumme Linien?

Schüler. Gerade Linien.

Lehrer. Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Wie viele gerade Linien seht Ihr hier? (auf Mitten.)

Schüler. Drey.

Lehrer. Sind sie alle drey einander gleich?

Schüler. Nein.

Lehrer. Sind ihrer zwey davon gleich?

Schüler. Ja.

Lehrer. Wo stehen diese zwey gleiche gerade Linien?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo ist die, ihnen nicht gleiche, gerade Linie?

Schüler. Unten.

Lehrer. Ist diese untere größer oder kleiner, als jede der obern?

Schüler. Kleiner.

Lehrer. Wo ist denn also die kleinere Linie?

Schüler. Unten.

Lehrer. Und wo sind die zwey gleichen größern?

Schüler. Oben.

Lehrer. (Auf unten deutend.) Wo ist hier die kleinere Linie?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Wo stehen die größern?

Schüler. Oben und Unten.

Lehrer. Ist die obere der untern gleich oder nicht?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Was sehet Ihr also hier für Linien?

Schüler. Zwey gleiche und eine ungleiche.

(Die Ausführung dieser Uebungsfragen durch alle folgende Tafeln (17 — 20) ist hier zu weitläufig, und kann auch füglich der Leitung des sachkundigen

Lehrers überlassen bleiben. Die Tafeln selbst deuten den Gang der Uebungen scharf genug an. Auch muß die Schultafel hierbey wieder gehörig gedrehet werden. Immer gibt es hier zwey Hauptfragen: 1) Das zu nennen, was Oben, Mitten und Unten, oder Rechts, Mitten und Links steht, und 2) zu sagen, wo diejenigen Linien an der Tafel stehen, welche der Lehrer nennet.)

Tafel 21, 22 und 23.

(Der Zweck dieser Tafeln Nro. 21—23 ist, die Anschauung von drey gleichen geraden Linien sowohl, als von zwey gleichen und einer ungleichen, in ihrer Verbindung zu Winkeln aufzuklären; dem Schüler zugleich auch die Benennung von den Arten und der Größe der Winkel, ihrer Schenkel und Scheitel zurückzurufen, und hierdurch fester zu begründen. Die weitere Ausführung bleibt dem Lehrer überlassen. Hier nur eine kurze Andeutung der Uebungsfragen.)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 21 an die Tafel.) Hier, Schüler! (oben) seht Ihr drey gerade Linien, die mit zwey ihrer Enden (deutend) zusammenstoßen. Sagt mir zuerst: Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey gerade Linien?

Schüler. Zwey Winkel.

Lehrer. Recht so. Sind diese Winkel stumpfe, rechte oder spitze?

Schüler. Stumpfe Winkel.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese zwey gerade Linien, (deutend) die den Winkel zur Rechten bilden?

Schüler. Die Schenkel.

Lehrer. Wie dieses? (auf den Scheitel deutend)

Schüler. Scheitel.

(Eben dieses für den Winkel zur Linken.)

Lehrer. (Auf Mitten) Nun sagt mir hier: Sind diese drey Linien gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wo ist die kleinere?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Sind die beyden andern gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey Linien?

Schüler. Zwey Winkel.

(Und so weiter wie vorhin.)

Lehrer. Wo sind die zwey gleichen Linien?

Schüler. Zur Rechten und zur Linken.

(Der Lehrer schreitet nun nach ähnlichem Gange fort, gibt der Tafel verschiedene Stellungen, und läßt bey Nro. 22 und 23 vorzüglich auch die größern und kleinern Winkel benennen.

Tafel 24, 25, 26 und 27.

(Diese Tafeln Nro. 24 — 27 dienen zur Unterscheidung und Benennung von drey geraden getrennten Linien, welche alle an Größe verschieden sind. Der Gang des Unterrichtes ist folgender, und bedarf hier nur einer Andeutung.)

Lehrer. Seht einmal her, Schüler! (nachdem er Nro. 24 gezeichnet hat, auf Oben deutend) und

betrachtet aufmerksam diese drey gerade Linien. Wo ist die größte?

Schüler. Oben.

Lehrer. Gut. Und wo steht die kleinste?

Schüler. Unten.

Lehrer. Auch recht. Nun betrachtet diese hier (deutend in der Mitte). Ist sie größer oder kleiner, als die obere? (deutend.)

Schüler. Kleiner.

Lehrer. Ist sie größer oder kleiner, als diese untere? (deutend.)

Schüler. Größer.

Lehrer. So ist's Recht. Nun präget Euch ein, was ich sage. Diese Linie (deutend) heißt die mittlere, aber nicht deshalb, weil sie hier mitten steht, sondern weil sie eine mittlere Größe hat, in Vergleich mit dieser größten (deutend) und mit dieser (deutend) kleinsten. Nun sagt mir sogleich wieder: wie heißt diese Linie; (auf die obere deutend.)

Schüler. Die größte.

Lehrer. Wie diese? (auf die mittlere zeigend.)

Schüler. Die mittlere.

Lehrer. Und wie wird diese genennt? (die untere deutend.)

Schüler. Die kleinste.

Lehrer. (Auf Mitten deutend) Nun schaut hierher und sagt: wo steht die größte Linie?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo ist die mittlere?

Schüler. Unten.

Lehrer. Und wo erblickt Ihr die kleinste?

Schüler. Mitten.

Lehrer. Sehr richtig. Aber wie heißt nun diese? (auf die untere deutend.)

Schüler. Die mittlere.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese hier? (auf die obere deutend.)

Schüler. Die größte.

Lehrer. Und wie diese? (auf die mittlere zeig.)

Schüler. Die kleinste.

(Nach diesem Muster wird die Uebung durch alle Zeichnungen und bey allen Stellungen der Schultafel durchgeführt. Zum Schlusse mögen alle Schüler eine jede einzelne Tafel, mit vernehmlicher Stimme von Oben nach Unten durchgehen; z. B. Nro. 25: Links die größte Linie, Mitten die mittlere Linie, Rechts die kleinste Linie. — Links die mittlere Linie, Mitten die größte Linie, Rechts die kleinste Linie. — Links die größte Linie, Mitten die kleinste Linie, Rechts die mittlere Linie. — Dergleichen Uebungen können mit mehrern andern Tafeln vorgenommen werden, und sind sehr bildend für das Anschauungsvermögen.)

Tafel 28, 29, 30 und 31.

(Der Zweck dieser Tafeln Nro. 28 — 31 ist die Betrachtung dreyer ungleichen geraden Linien in ihren Verbindungen zur Bildung zweyer Winkel, um hierdurch die Anschauung des Dreyecks (wie Nro. 31 zeiget) allmählig vorzubereiten. Aus diesem Zwecke ergibt sich der Cyclus der Uebungsfragen. Doch wollen wir kürzlich ihren Gang andeuten.)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 28 auf die Tafel und spricht:) Seht hierher, Schüler! (Oben) und sagt mir: Wie viele gerade Linien sehet Ihr?

Schüler. Drey.

Lehrer. Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wie heißt diese zur Linken stehende? (deutend.)

Schüler. Die größte.

Lehrer. Die Mitten stehende? (deutend.)

Schüler. Die mittlere.

Lehrer. Und diese zur Rechten hier? (deutend.)

Schüler. Die kleinste.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey Linien?

Schüler. Zwey.

(Nun folgen Fragen über die Art dieser Winkel, über Schenkel und Scheitel. Sodann werden diese Uebungen durch alle Tafeln auf gleiche Weise fortgeführt, und die Stellung der Schultafel dabey öfters verändert. Zum Schlusse noch dieses):

Lehrer. (Zeichnet Nro. 29, und deutet auf Oben) von welchen Linien wird dieser rechte Winkel gebildet?

Schüler. Von der größten und kleinsten. (Einige Schüler können auch sagen: von der kleinsten und größten, was hier einerley ist.)

Lehrer. Welche Linien bilden diesen spitzen Winkel? (deutend.)

Schüler. Die größte und mittlere.

(Solche Uebungen werden nun auch noch über mehrere andere Tafeln angestellt.)

Tafel 32.

(Der Zweck dieser Tafel Nro. 32 ist, die Anschauung des gleichseitigen, gleichschenkeligen und ungleichseitigen Dreyecks klar zu machen und tief einzuprägen, was nun nicht mehr schwer fällt, da die Kenntniß von Seiten und Winkel vorhergegangen ist.)

Lehrer. (Nachdem Nro. 32 gezeichnet ist, auf Oben deutend) Hier, Schüler! will ich Euch etwas Neues lehren. Betrachtet diese Zeichnung sehr aufmerksam und sagt mir: Wie viele gerade Linien seht Ihr hier?

Schüler. Drey gerade Linien.

Lehrer. Das ist klar. Aber sind sie alle drey einander gleich oder nicht?

Schüler. Sie sind alle drey gleich.

Lehrer. Wie viele Winkel bilden diese drey Linien an ihren Enden, mit welchen sie zusammenstoßen?

Schüler. Drey Winkel.

Lehrer. Recht so. Nun betrachtet diese drey Winkel einzeln gegeneinander, und sagt mir: Erscheinen sie Euch alle gleich oder ungleich?

Schüler. Gleich.

Lehrer. Richtig. Jetzt merket, was ich Euch sage. Da diese Zeichnung drey Winkel hat, (deutend) jeder Winkel aber eine Ecke bildet, wenn man um alle drey Linien herumgehen wollte, so nennt man das, was Ihr hier sehet, ein Dreyeck. Diese drey Linien, welche das Dreyeck bilden, heißen die

Seiten des Dreyecks, und, weil hier alle drey Seiten (deutend) einander gleich sind, so heißt es: ein gleichseitiges Dreyeck. Nun wiederholt mir Alle: Wie nennt man dies?

Schüler. Ein gleichseitiges Dreyeck.

Lehrer. Warum heißt Ihr aber diese Zeichnung ein Dreyeck?

Schüler. Weil sie drey Ecken hat.

Lehrer. Wo steht diese Ecke? (die Spitze deut.)

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo diese? (rechts deutend.)

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Und wo seht Ihr diese? (links zeigend.)

Schüler. Zur Linken.

Lehrer. Wie nennt Ihr diese drey Linien, welche das Dreyeck bilden?

Schüler. Die Seiten des Dreyecks.

Lehrer. Wie viele Seiten hat also dieses Dreyeck?

Schüler. Drey Seiten.

Lehrer. Warum nennen wir aber dieses Dreyeck ein gleichseitiges Dreyeck?

Schüler. Weil es lauter gleiche Seiten hat.

Lehrer. So ist's Recht. Wo steht diese Seite? (rechts deutend.)

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Wo befindet sich diese? (unten deutend.)

Schüler. Unten.

Lehrer. Und wo erblickt Ihr diese Seite? (links deutend.)

Schüler. Zur Linken.

(Diese Fragen werden nun so lange wiederholt, bis den Schülern Alles Gesagte klar und geläufig geworden ist.)

Lehrer. (Auf Mitten deutend) Sehet nun hierher und sagt mir: Wie viele Ecken hat diese Zeichnung?

Schüler. Drey Ecken.

Lehrer. Wie nennt Ihr sie also?

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. So ist's. Wie viele Seiten hat denn dieses Dreyeck?

Schüler. Drey Seiten.

(Die Lage dieser Ecken und Seiten wird nun wie vorhin bestimmt.)

Lehrer. Betrachtet nun einmal diese zwey Seiten (auf die gleichen Schenkel deutend) recht genau, und sagt mir: Sind sie gleich oder ungleich?

Schüler. Sie sind gleich.

Lehrer. Aber ist jede dieser gleichen Seiten dieser untern auch gleich, oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wie viele gleiche Seiten hat also dieses Dreyeck?

Schüler. Zwey gleiche Seiten.

Lehrer. Richtig. Nun merkt Euch wieder ein neues Wort, was ich Euch nenne. Ein Dreyeck, welches zwey gleiche Seiten hat, (deutend) heißt:

Ein gleichschenkeliges Dreyeck, und seine zwey gleiche Seiten heißen: Die gleichen Schenkel. Sagt mir nun Alle schnell: Wie heißt dieses Dreyeck? (deutend.)

Schüler. Gleichschenkeliges Dreyeck.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diese zwey gleiche Seiten?

Schüler. Die gleichen Schenkel.

Lehrer. Gut. Warum heißt aber dieses Dreyeck ein gleichschenkeliges?

Schüler. Weil es zwey gleiche Seiten hat.

Lehrer. Recht so. Allein nun müßt Ihr Euch noch etwas merken. Seht her, diese Seite des gleichschenkeligen Dreyecks, (deutend) welche diesen beyden andern (deutend) ungleich ist, heißt: Die Grundlinie des gleichschenkeligen Dreyecks, und der Scheitel dieses Winkels, (deutend) welcher der Grundlinie gegenüber steht, heißt: die Spitze des gleichschenkeligen Dreyecks. Sagt mir nun wieder: Wie nennt man diese Seite im gleichschenkeligen Dreyecke? (deutend.)

Schüler. Grundlinie.

Lehrer. Und wie heißt dieser Scheitel?

Schüler. Die Spitze.

Lehrer. Wenn Ihr diese Grundlinie (deutend) betrachtet, so seht Ihr, daß sich ein Winkel an ihrem Ende zur Rechten, und eben so ein Winkel an ihrem Ende zur Linken befindet. (deutend) Seht einmal wohl zu, ob diese zwey Winkel einander gleich sind, oder ungleich?

Schüler. Sie sind gleich.

Lehrer. Ihr habt Recht. Diese zwey Winkel haben auch ihren Namen. Sie heißen: die Winkel an der Grundlinie. Wie heißen diese zwey Winkel?

Schüler. Winkel an der Grundlinie.

(Jetzt folgen über diese neue Anschauungen im gleichschenkeligen Drey ecke die Uebungsfragen auf die, jedem verständigen Lehrer, bekannte Weise. Die Uebung ist wieder von doppelter Art. Die Schüler müssen die, sich neu erworbenen, Anschauungen richtig benennen, und sodann wieder diese, mit Worten ausgesprochene, Anschauungen nach ihrer Lage zu bestimmen wissen.)

Lehrer. (Auf unten deutend) Wie nennt Ihr das, was ich daher gezeichnet habe?

Schüler. Dreyeck.

Lehrer. Warum nennt Ihr es Dreyeck?

Schüler. Weil es drey Ecken hat.

Lehrer. So ist es. Nun betrachtet abermal seine drey Seiten, und sagt mir: Wo ist die kleinste?

Schüler. Zur Linken.

Lehrer. Wo die mittlere.

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Und wo die größte?

Schüler. Unten.

Lehrer. Recht so. Sind also diese drey Seiten unter sich gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Nun bemerket, was ich Euch sage.

Ein Dreyeck, dessen drey Seiten einander ungleich sind, heißt: Ein ungleichseitiges Dreyeck. Sagt mir nun Alle: Wie nennt Ihr dieses Dreyeck? (deutend.)

Schüler. Ungleichseitiges Dreyeck.

Lehrer. Warum nennt Ihr es so?

Schüler. Weil es drey ungleiche Seiten hat.

(Alles dieses wird nun noch, bey verschiedenem Stande der Schultafel, so lange wiederholt, als es dem einsichtsvollen Lehrer nöthig scheint.)

Tafel 33 und 34.

(An diesen Tafeln Nro. 33 und 34 wird das rechtwinkelige, spitz- und stumpfwinkelige Dreyeck zur klaren Anschauung des Schülers gebracht. Der Gang des Unterrichtes ist dieser):

Lehrer. (Zeichnet Nro. 33, und deutet auf Oben) Wie nennt Ihr diese Zeichnung?

Schüler. Dreyeck.

Lehrer. Richtig. Wir wollen aber nun nicht, wie vorhin, auf die Seiten dieses Dreyecks sehen, sondern einmal seine Winkel betrachten. Da sagt mir nun sogleich: Wie heißt dieser Winkel? (rechts deutend.)

Schüler. Ein spitzer Winkel.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diesen? (Oben deutend.)

Schüler. Auch einen spitzen Winkel.

Lehrer. Aber was ist das hier für ein Winkel? (links deutend.)

Schüler. Ein rechter Winkel.

Lehrer. Was für Winkel befinden sich also in diesem Dreyecke?

Schüler. Zwey spitze Winkel und ein rechter Winkel.

Lehrer Nun gebt Acht. Ein Dreyeck, worin sich zwey spitze Winkel und ein rechter befinden, heißt: Ein rechtwinkeliges Dreyeck. Nun sagt es Alle: Wie heißt dieses Dreyeck?

Schüler. Ein rechtwinkeliges Dreyeck.

Lehrer. Wohl. Aber warum nennt Ihr es so?

Schüler. Weil es einen rechten Winkel und zwey spitze Winkel hat.

Lehrer. Betrachtet jetzt einmal die drey Seiten dieses Dreyecks, und sagt mir: Wo ist die größte?

Schüler. Zur Rechten.

Lehrer. Richtig. Nun bemerkt auch noch, daß man diese (deutend) größte Seite im rechtwinkeligen Dreyecke die Hypotenuse nennt. Sprecht mir nun geschwinde nach. Wie heißt diese größte Seite im rechtwinkeligen Dreyecke?

Schüler. Hypotenuse.

Lehrer. Welche Seite des rechtwinkeligen Dreyecks heißt Ihr Hypotenuse?

Schüler. Die größte Seite.

Lehrer. Nun merket ferner. Diese beyde Seiten (deutend) des rechtwinkeligen Dreyecks, welche den rechten Winkel bilden, heißen: Die Catheten. — Wie nennt man diese Seiten?

Schüler. Die Catheten.

Lehrer. Welche Seiten des rechtwinkeligen Dreyecks heißen: die Catheten?

Schüler. Jene zwey, welche den rechten Winkel bilden.

(Diese Fragen werden nun, auf bekannte Weise, wiederholt. Auf gleiche Art kläret der Lehrer sodann die Anschauung des spitz- und stumpfwinkeligen Dreyecks (Mitten und Unten) auf. Diese Uebungen werden in Nro. 34 fortgesetzt. Auch verändert der Lehrer öfters die Lage der Tafel, und folgt in seinen Entwickelungen immer der, schon öfters bemerkten, doppelten Methode.)

Tafel 35, 36, 37, 38 und 39.

(Diese Tafeln Nro. 35 – 39 haben die Bestimmung, die Anschauung der Vierecke, und ihrer Gattungen dem Schüler einzuprägen.)

Lehrer. (Hat Nro. 35 gezeichnet) Heute, Schüler! wollen wir einen großen Schritt weiter thun. Wir verlassen die seither betrachteten Dreyecke, und gehen zu den Verbindungen von vier geraden Linien. Betrachtet nun einmal diese (deutend) Zeichnung und sagt mir sogleich: Wie viele Winkel oder Ecken hat solche?

Schüler. Vier Ecken.

Lehrer. Richtig. Wenn wir nun früher eine Zeichnung mit drey Ecken ein Dreyeck genannt haben; wie werdet Ihr diese Zeichnung mit vier Ecken nennen?

Schüler. Viereck.

Lehrer. Getroffen. Betrachtet jetzt auch diese Zeichnungen. (auf Mitten und Unten) Wie müßt ihr diese heißen?

Schüler. Auch Vierecke.

Lehrer. So ist es. Aber nun seht wieder daher (Oben) und sagt mir: Was sind denn das für Winkel? (auf alle vier deutend.)

Schüler. Rechte Winkel.

Lehrer. Nun betrachtet auch diese vier Seiten, und sagt mir: Sind alle gleich oder nicht?

Schüler. Sie sind alle gleich.

Lehrer. Jetzt behaltet auch das Wort, womit man dieses Viereck bezeichnet; es heißt: Ein Quadrat. — Wie heißt dieses Viereck?

Schüler. Ein Quadrat.

(Nun folgen die Fragen: Wie viele Ecken oder Winkel hat ein Quadrat? Wie viele Seiten? Sind die Winkel gleich, oder ungleich? Sind die Seiten gleich oder ungleich?)

(Auf gleiche Weise wird nun auch das Rechteck, mit Rücksicht auf gegenüberstehende gleiche Seiten; die Raute, mit Bemerken der stumpfen und spitzen Winkel, und die Rhomboide, in Bezug auf gleiche Seiten und gleiche Winkel, behandelt.)

(Ist dieses durchgeführt, so folgen die Fragen: Was steht (Tafel 35) Oben, Unten, Mitten? und (bey gedrehter Tafel) Rechts, Links, Mitten?)

Lehrer. (Nachdem Nro. 36 gezeichnet ist) Betrachtet einmal diese Rhomboide (deutend) und sagt

mir: Ob diese obere Linie und diese untere Linie (zeigend) gleichlaufend sind, oder nicht?

Schüler. Gleichlaufend.

Anmerk. Sollten dies die Schüler nicht sogleich übersehen, so muß der Lehrer sie wieder darauf führen.

Lehrer. Eben so ist auch diese (rechts und links deutend) mit dieser gleichlaufend. Nun seht einmal daher (Mitten) und sagt: ob diese obere Linie mit dieser untern gleichlaufend ist?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ist auch diese zur Rechten mit jener zur Linken gleichlaufend?

Schüler. Nein.

Lehrer. Gut. Nun bemerkt Euch auch ein neues Wort: Dieses Viereck, worin nur diese eine Seite (deutend) mit der ihr gegenüberstehenden gleichlaufend ist, heißt: Ein Paralleltrapez. Nun wiederholt Alle dieses Wort?

Schüler. Paralleltrapez.

(Der Lehrer läßt dieses etwas schwer zu nennende Wort noch mehrmals von den Schülern nennen, bis es ihnen geläufig ist.)

Lehrer. Jetzt muß ich Euch noch ein Viereck benennen, das hier unten (deutend) steht. Ihr erkennt es daran, daß keine Seite mit der ihr gegenüberstehenden gleichlaufend ist. Sehet selbst und antwortet: Ist diese obere Seite (deutend) mit dieser untern gleichlaufend?

Schüler. Nein.

Lehrer. Ist diese zur Rechten (deutend) mit dieser zur Linken gleichlaufend?

Schüler. Nein.

Lehrer. Nun gut. Jetzt merkt Euch auch die Benennung dieses Vierecks. Es heißt: Trapez. — Wie nennt man dieses Viereck? (deutend.)

Schüler. Trapez.

(Auch dieses Wort muß mehrmal wiederholt werden, bis es geläufig ist.)

(Diese sechserley Benennungen der Vierecke werden nun, nach obiger Anleitung, an den Tafeln Nro. 37 und 38 gehörig durchgeführt, und die Schultafel in mancherley verschiedene Lagen gestellt. Zur Wiederholung kann der Lehrer sodann die drey Felder dieser Tafel, durch eine mitten durchgezogene gerade Linie, in sechs Gefache theilen, und die sechserley Vierecke hineinzeichnen. Jetzt stehen sie den Schülern alle vor Augen, und durch schickliche Fragen werden sie sich ihre Anschauung vollkommen klar machen.)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 39 auf die Tafel) Zum Schlusse von den Vierecken muß ich Euch noch eine Linie lehren, die in der Folge merkwürdig ist. Seht her (auf Oben deutend) diese gerade Linie im Vierecke, welche von diesem Scheitel bis zu diesem entgegenstehenden (deutend) gezogen wird, nennt man: Eine Diagonallinie oder Querlinie. Nennt mir nun sogleich Alle dieses Wort?

Schüler. { Diagonallinie. / Querlinie. } Wird öfters wiederholt.

Lehrer. In dem Vierecke hier (Mitten) ist diese Linie (deutend) auch eine Diagonallinie. Denn es ist einerley, ob sie von der Rechten zur Linken (auf Oben deutend) wie vorhin; oder von der Linken zur Rechten (auf Mitten) wie hier gezogen wird. Nun betrachtet diese gerade Linie aufmerksam (Unten) und sagt mir, wie heißt sie?

Schüler. Diagonallinie oder Querlinie.

Lehrer. Gut. Nun seht wieder hierher (Oben) und sagt mir: Wie heißt das, was unterhalb dieser Diagonallinie liegt? (den Umfang dieses Dreyecks deutend.)

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. Richtig. Und was liegt oberhalb dieser Diagonallinie hier? (ebenfalls deutend)

Schüler. Auch ein Dreyeck. (Eben dieses bey Mitten und Unten.)

Lehrer. In wie viele Theile theilt also die Diagonallinie jedes Viereck?

Schüler. In zwey Theile.

Lehrer. Wie heißt jeder dieser zwey Theile?

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. In was theilt also die Querlinie jedes Viereck?

Schüler. In zwey Dreyecke.

Tafel 40 und 41.

(Diese Tafeln begründen die Anschauungen des Fünf-, Sechs- und Siebeneckes.)

Lehrer. (Zeichnet zuerst Nro. 40) Heute,

Schüler! sollt Ihr wieder einen Schritt weiter gehen. Betrachtet einmal diese Zeichnung, (Oben) und sagt mir sodann: Wie viele Winkel oder Ecken hat sie?

Schüler. Fünf Ecken.

Lehrer. Richtig. Besinnt Euch ein wenig und sagt mir: Wie nennt Ihr das?

Schüler. Fünfeck.

Lehrer. So ist's Recht. Zählet nun auch die Seiten dieses Fünfecks und sagt: wie viele sind es?

Schüler. Auch fünf.

Lehrer. Betrachtet diese fünf Seiten genauer, und sprecht: Sind sie alle einander gleich oder nicht? (darauf deutend.)

Schüler. Sie sind alle gleich.

Lehrer. Nun seht her auf diese fünf Winkel. (deutend) Sind sie sich alle gleich oder nicht?

Schüler. Sie sind auch gleich.

Lehrer. Ein Fünfeck, wie dieses, welches fünf gleiche Seiten und fünf gleiche Winkel hat, heißt: Ein regelmäßiges Fünfeck. Wie nennt ihr daher dieses Fünfeck?

Schüler. Ein regelmäßiges Fünfeck.

(Der Lehrer drehet nun allmählig die Tafel herum, und zeigt, indem jede Seite des Fünfecks unten ist, daß es diesen fünferley Lagen dasselbige Ansehen hat.)

(Durch einen ähnlichen Cyclus von Fragen bildet sich der Schüler die Anschauung vom regelmäßigen Sechsecke und Siebenecke.)

(Da durch eben diese Reihenfolge von Fragen auch die Anschauung des unregelmäßigen Fünf-, Sechs- und Siebenecks auf Nro. 41 deutlich wird, indem der Lehrer hier nur auf die ungleichen Seiten und ungleichen Winkel aufmerksam macht, so bedarf auch dies hier keiner weitern Entwickelung. Es ist zu rathen, daß Nro. 41 in verschiedenen Lagen der Schultafel betrachtet werde.)

Tafel 42, 43, 44, 45 und 46.

(Diese Tafeln Nro. 42—46 beziehen sich auf den Kreis, und einige damit verbundene Elementaranschauungen.)

Lehrer. (Nachdem Nro. 42 gezeichnet ist) Bisher, Schüler! haben wir nur die Verbindungen von geraden Linien betrachtet. Jetzt wollen wir eine krumme Linie kennen lernen, welche dem Auge wohlgefällig ist, und deren Kenntniß Euch in der Folge sehr nützlich seyn wird. Betrachtet einmal hier, (oben deutend) diese überall gleichgebogene, krumme Linie recht aufmerksam, und merkt Euch ihren Namen. Sie heißt Kreislinie, und dieser Punct (deutend) den Ihr in ihrer Mitte erblickt, ist ihr Mittelpunct. Nun wiederholt es Alle: Wie nennt ihr diese krumme Linie? (deutend.)

Schüler. Kreislinie.

Lehrer. Und diesen Punct? (deutend.)

Schüler. Mittelpunct.

Lehrer. Richtig. Nun weiter. Diese gerade Linie hier (mitten deutend) von dem Mittelpuncte bis zur Kreislinie hin, ist der Halbmesser; und

diese größere gerade Linie (unten) durch den Mittelpunct zu beyden Seiten der Kreislinie, heißt: Der Durchmesser. Nun sagt mir, wie heißt diese gerade Linie? (mitten.)

Schüler. Halbmesser.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diese? (unten.)

Schüler. Durchmesser.

Lehrer. So ist es. Nun sagt mir, wo ist die Kreislinie?

Schüler. Oben.

Lehrer. Wo der Mittelpunct?

Schüler. In ihrer Mitte.

Lehrer. Wo seht ihr den Durchmesser?

Schüler. Unten.

Lehrer. Wo ist der Halbmesser?

Schüler. Mitten.

(Diese Uebungen werden nun auch bey umgedrehter Tafel wiederholend ausgeführt.)

Lehrer. Nun merkt ferner (Nachdem Nro. 43 verzeichnet ist, auf oben deutend) eine gerade Linie wie diese, welche die Kreislinie beyderseits berührt, ohne durch ihren Mittelpunct zu gehen, heißt: Sehne. — Merkt Euch das, und sagt mir nun schnell wieder: Wie nennt man diese gerade Linie?

Schüler. Sehne heißt sie.

Lehrer. Vergesset dies nicht mehr. Betrachtet diesen Durchmesser (mitten) und sagt: Ist dieses obere Stück der Kreislinie (deutend) diesem untern gleich oder nicht?

Schüler. Es ist ihm gleich.

Lehrer. Dasjenige, was zwischen diesem Durchmesser (deutend) und dieser obern halben Kreislinie liegt, heißt: Der obere Halbkreis. Dasjenige aber, was Ihr zwischen diesem Durchmesser und dieser untern Kreislinie (deutend) erblicket, heißt der untere Halbkreis. Sagt mir nun schnell: Wie nennt man dieses (deutend auf oben.)

Schüler. Den obern Halbkreis. (Eben so mit dem untern Halbkreise, und dann, bey wagrechtem Stande der Tafel, mit dem Halbkreise zur Rechten und zur Linken.)

Lehrer. Jetzt seht hierher. Wenn diese zwey Halbmesser (unten) einen rechten Winkel bilden, so nennt man das, was zwischen ihnen und dieser krummen Linie liegt, (deutend) den Quadranten. Nun sagt wieder: Wie nennt man dies? (deutend.)

Schüler. Einen Quadranten.

(Nun folgen die bekannten Wiederholungen dieser Tafel.)

Lehrer. (Zeichnet Nro. 44 und deutet auf oben) Diese gerade Linie hier ausserhalb des Kreises, welche die Kreislinie nur an dieser einen Stelle berührt, heißt: Eine Tangente oder eine Berührungslinie. Wiederholt mir nun Alle dieses Wort und sagt: Wie nennt man diese gerade Linie hier?

Schüler. Tangente, oder Berührungslinie.

Lehrer. Zur Wiederholung sagt mir auch noch: Wie heißt jede von diesen zwey Linien in der Kreislinie? (deutend.)

Schüler. Eine Sehne.

Lehrer. Da nun hier diese untere größer ist, als die obere, wie nennt Ihr diese untere?

Schüler. Die größere Sehne.

Lehrer. Und diese hier? (deutend.)

Schüler. Die kleinere Sehne.

Lehrer. Das, was hier (auf Mitten deutend) zwischen diesen zwey Halbmessern und dieser krummen Linie liegt, heißt: ein Ausschnitt; und das, was Ihr hier (auf Unten und auf den kleinern Abschnitt deutend) zwischen dieser Sehne und dieser krummen Linie erblicket, wird ein Abschnitt genennt. Nun sagt mir Alle: Wie heißt dieses? (Mitten)

Schüler. Ausschnitt.

Lehrer. Und wie dieses? (Unten und an den Grenzlinien herumfahrend.)

Schüler. Abschnitt.

Lehrer. Seht Ihr hier (an den Grenzen des größern Abschnitts herumfahrend) nicht auch einen Abschnitt?

Schüler. Ja.

Lehrer. Ist dieser obere Abschnitt (deutend) dem untern gleich oder ungleich?

Schüler. Ungleich.

Lehrer. Wie nennt Ihr wohl den obern Abschnitt, da er der größere ist?

Schüler. Den größeren Abschnitt.

Lehrer. Richtig. Und wie heißt der untere Abschnitt?

Schüler. Der kleinere Abschnitt.

(Nun folgen die Wiederholungsfragen auf die bekannte Weise, und in verschiedenen Stellungen der Tafel.)

Lehrer. (Nachdem er Nro. 45 gezeichnet und auf Oben gedeutet hat) Was seht Ihr hier? (auf die Kreislinie deutend.)

Schüler. Einen Kreis.

Lehrer. Gut. Aber was erblickt Ihr in diesem Kreise? deutend)

Schüler. Ein Dreyeck.

Lehrer. So ist es. Nun merkt Euch dieses. Wenn ein Dreyeck mit seinen drey Winkelspitzen (deutend) in der Kreislinie liegt, so heißt das Dreyeck ein eingeschriebenes, und der Kreis, weil er um das Dreyeck gezeichnet ist, der umschriebene Kreis. Nun wiederholt mir diese Worte. Wie heißt Ihr dieses Dreyeck in Rücksicht auf diesen Kreis?

Schüler. Ein eingeschriebenes Dreyeck.

Lehrer. Und wie nennt Ihr diesen Kreis in Rücksicht auf dieses Dreyeck? (deutend)

Schüler. Einen umschriebenen Kreis.

Lehrer. (Auf irgend eine Seite des Dreyecks deutend) Wie nennt Ihr diese gerade Linie in Rücksicht auf diesen Kreis?

Schüler. Eine Sehne.

Lehrer. Und das, was zwischen dieser Sehne und dieser krummen Linie liegt? (deutend)

Schüler. Abschnitt.

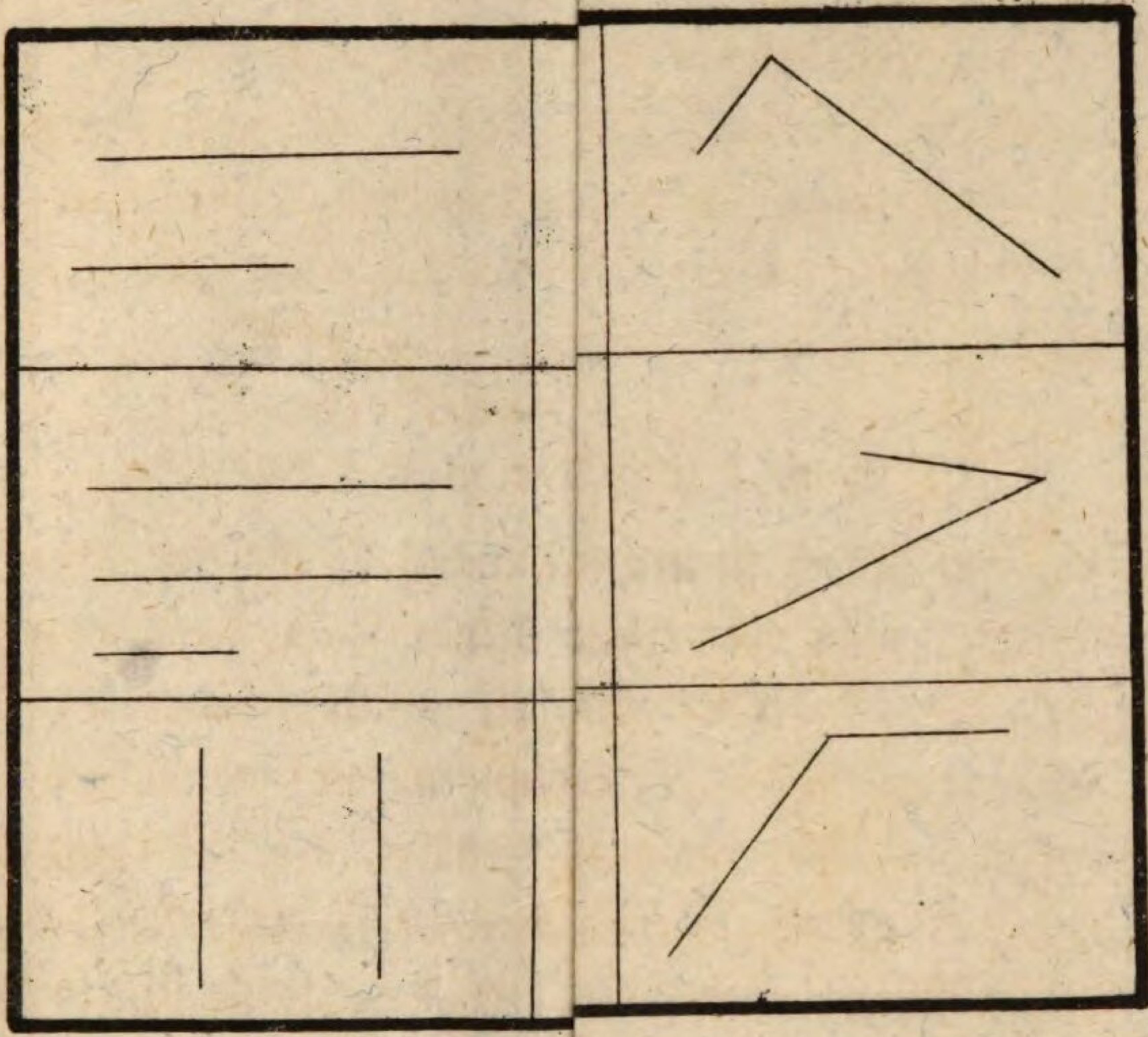
(Auf eben diese Art werden nun die fünf übrigen Zeichnungen auf Nro. 45—46 durchgenommen. Hierauf folgen die gewöhnlichen Wiederholungen, und diese wieder bey verschiedener Stellung der Tafel.)

Schlußbemerkung.

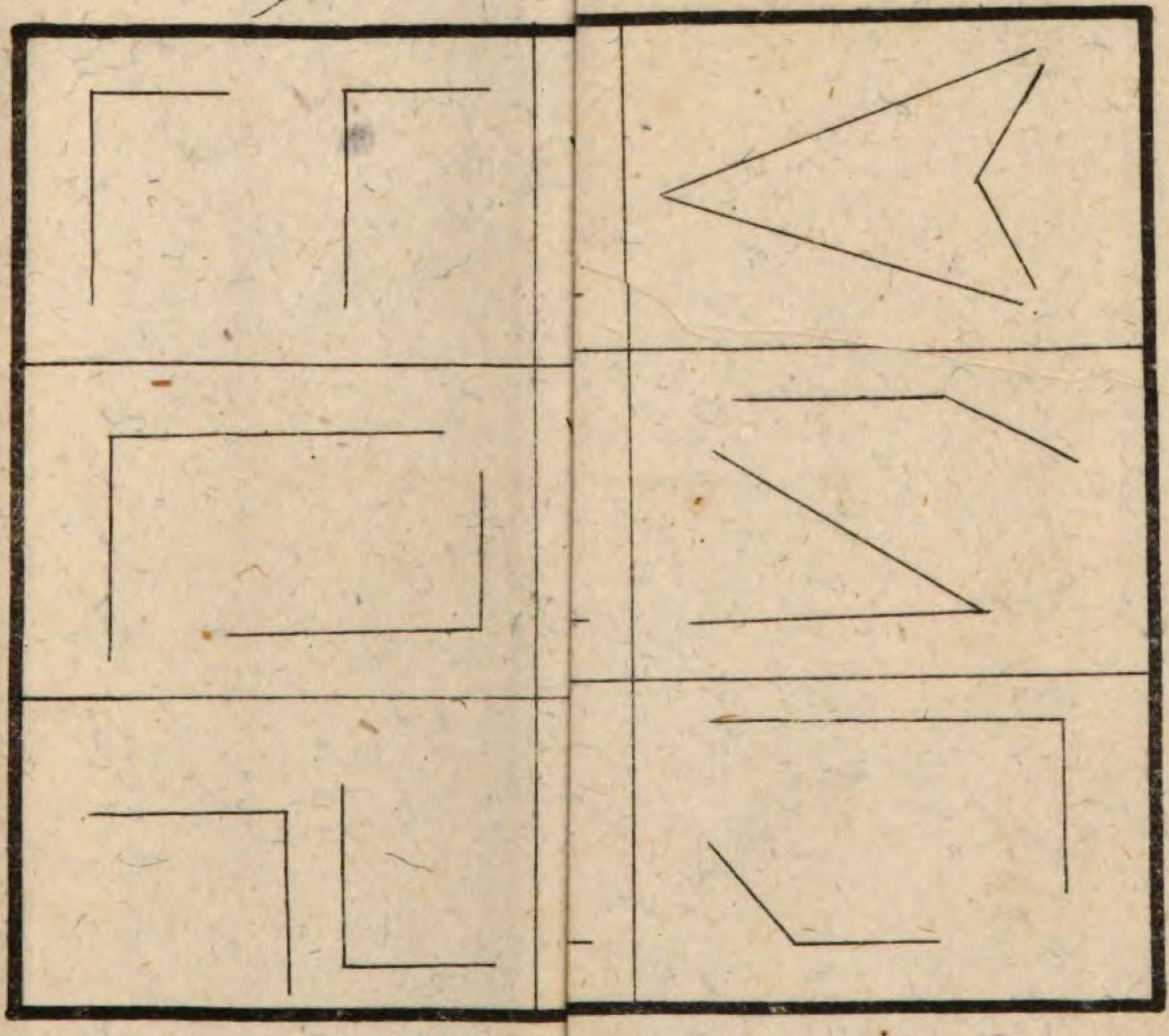
Bey diesem Unterrichte mache es sich der Lehrer zum Gesetze, nicht eher etwas Neues vorzunehmen, bis das Frühere mit größter Klarheit gefaßt worden ist. Auch stelle er fleisige Wiederholungen an; besonders wenn irgend ein Hauptabschnitt beendigt ist. Ueberhaupt wird sich der verständige, mit dem Geiste dieser Methode vertraute Lehrer immer nach dem Bedürfnisse seiner Schüler richten.

Tafel: I.

3. 6:

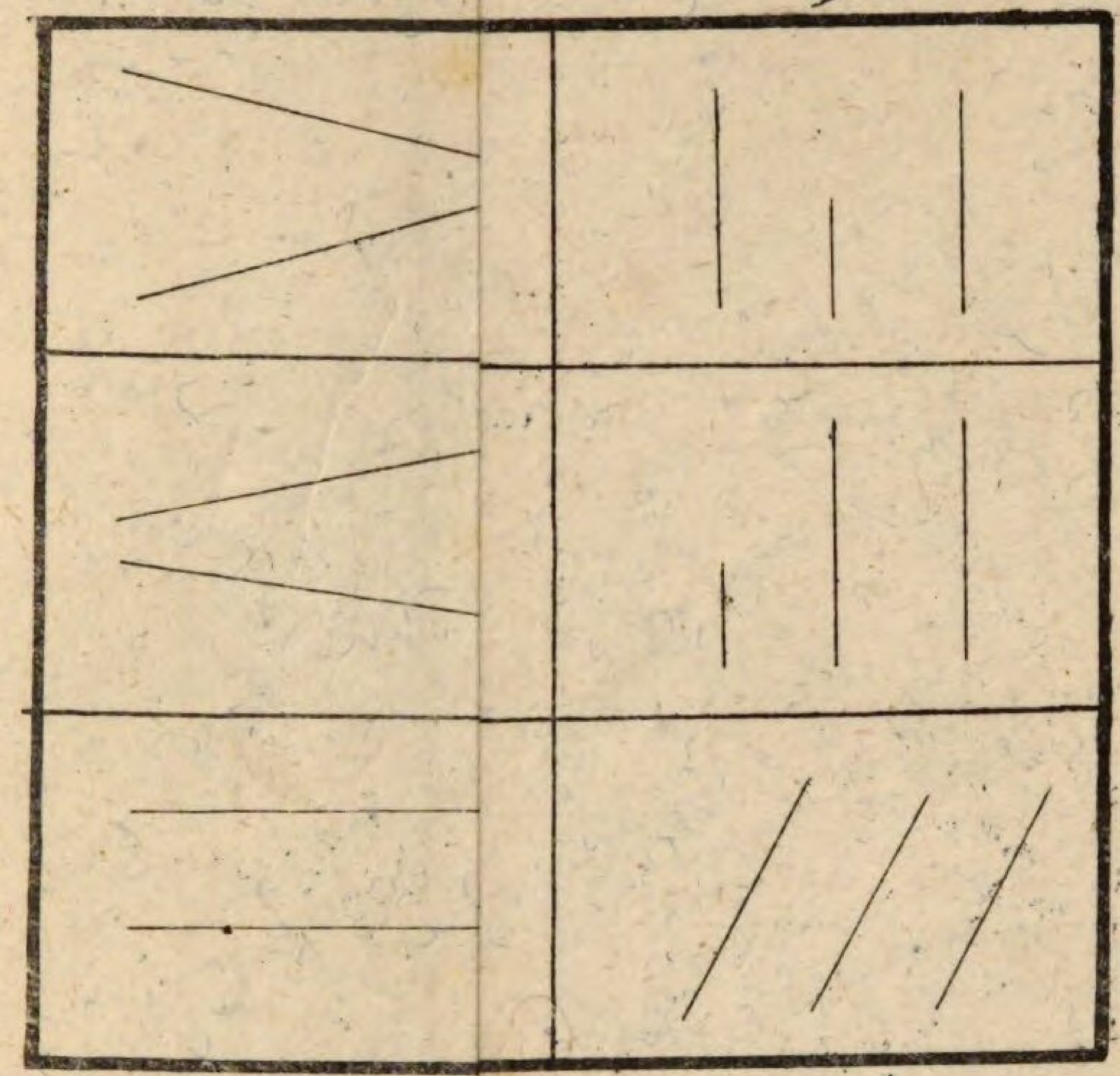


9. 12.

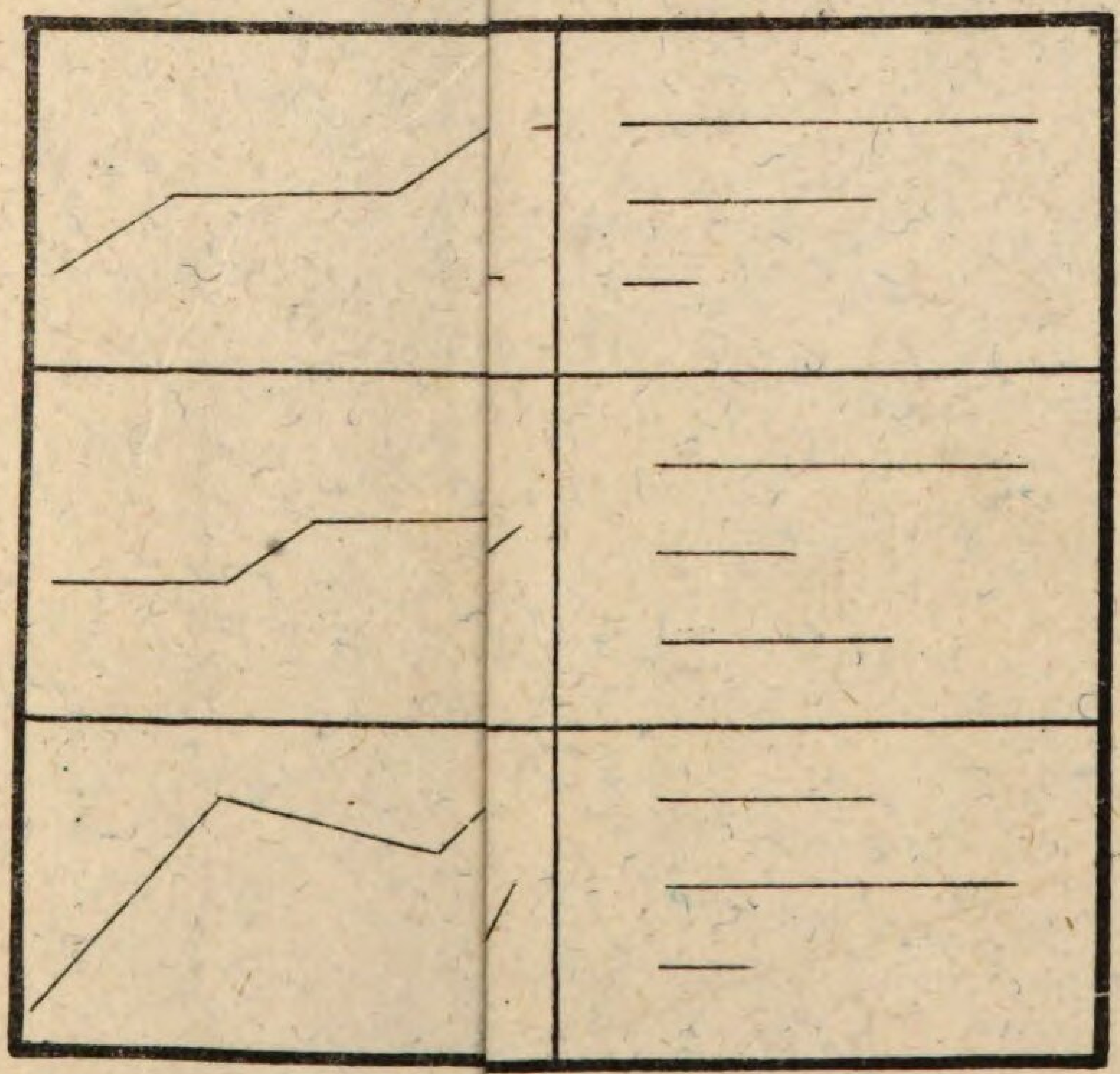


Tafel II.

16. 19.

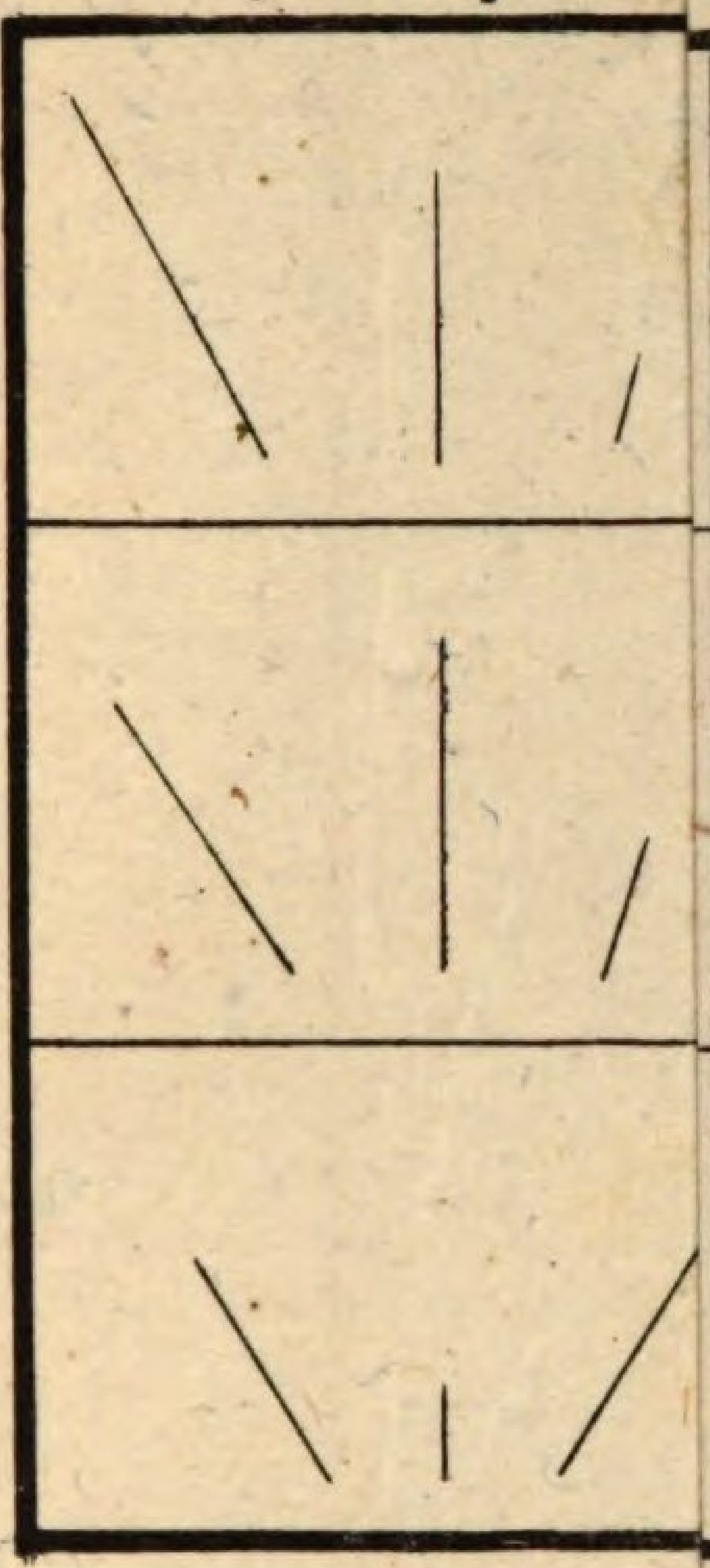


22. 25.

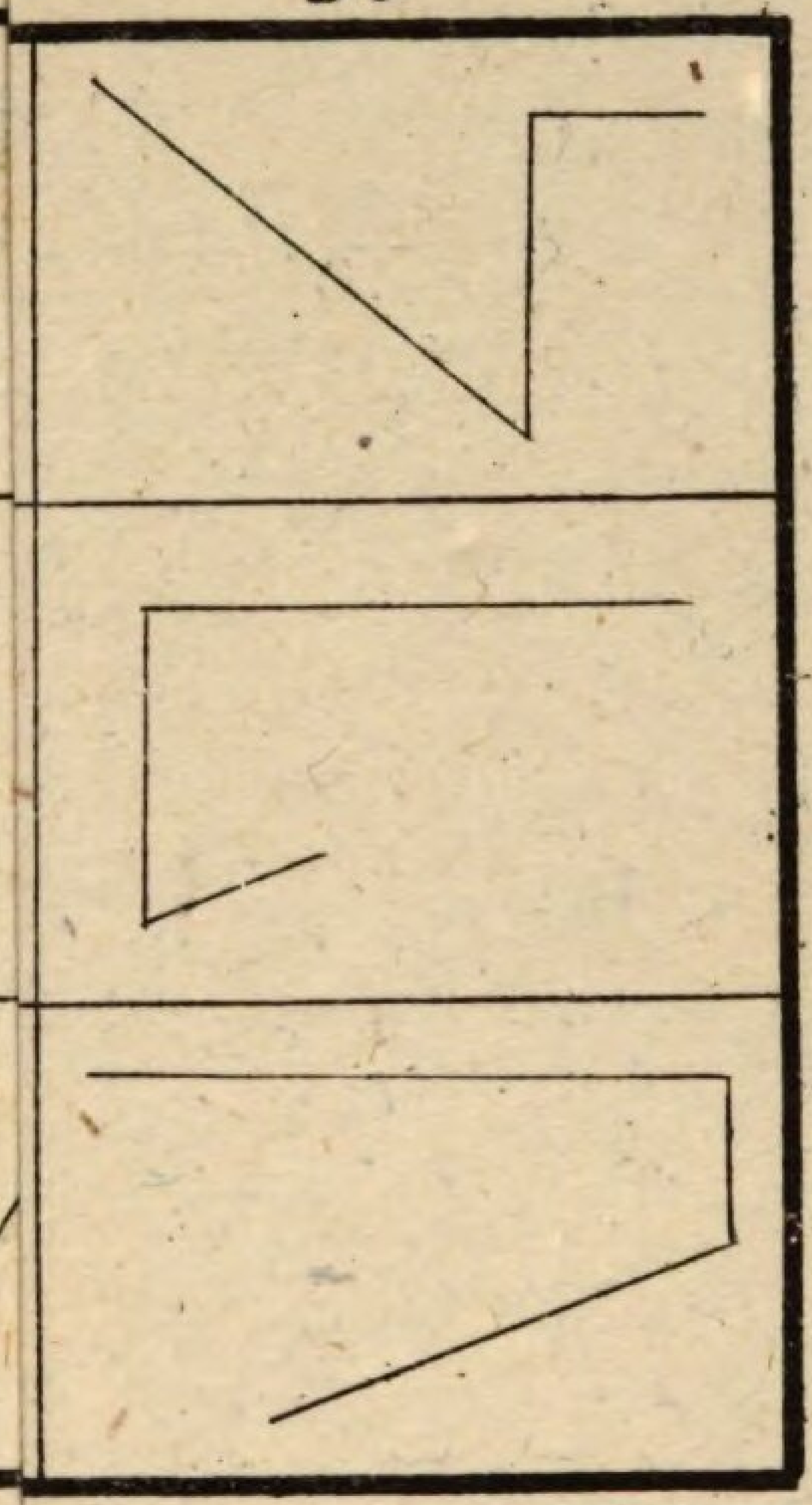


fel von 14 bis 25 in 13 bi

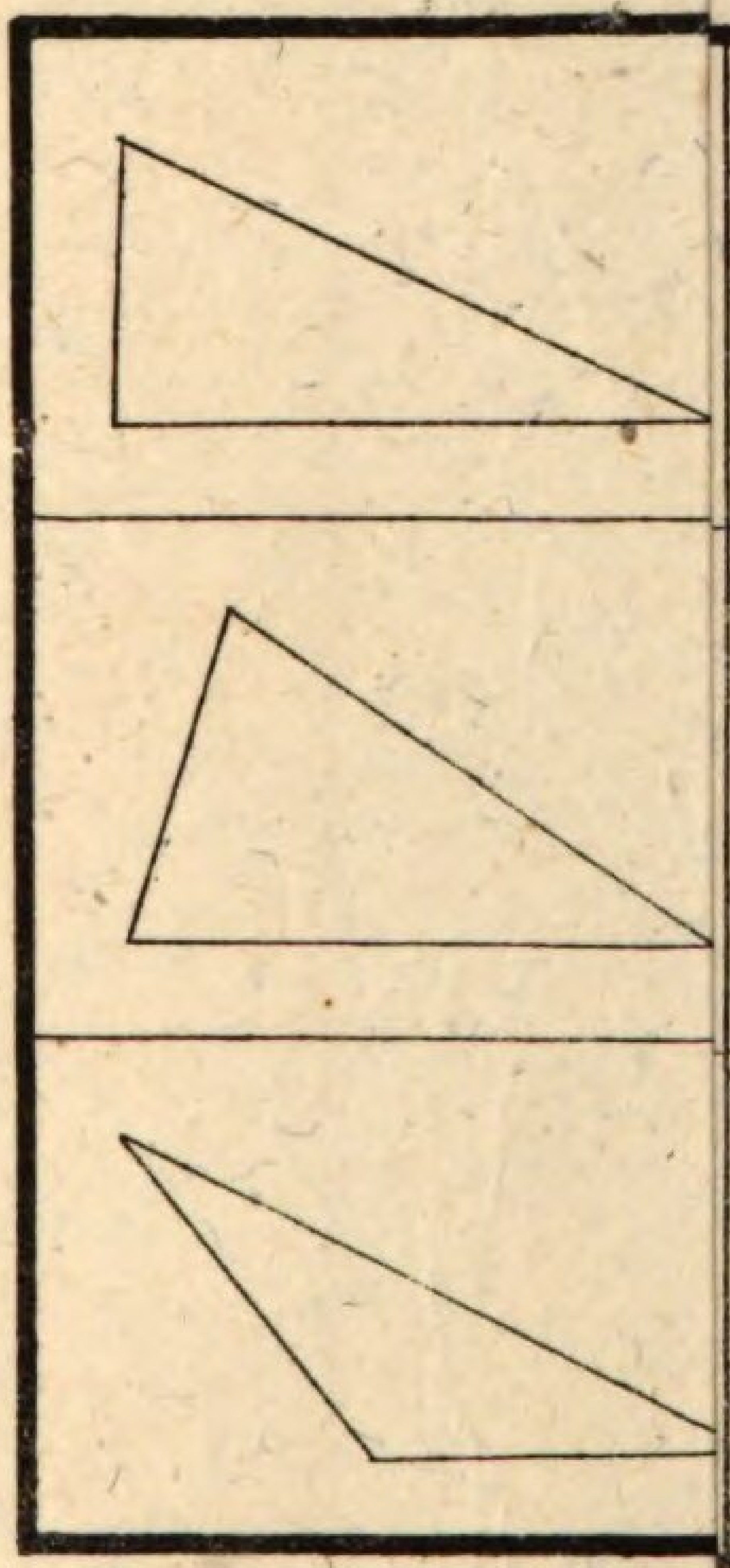
27.



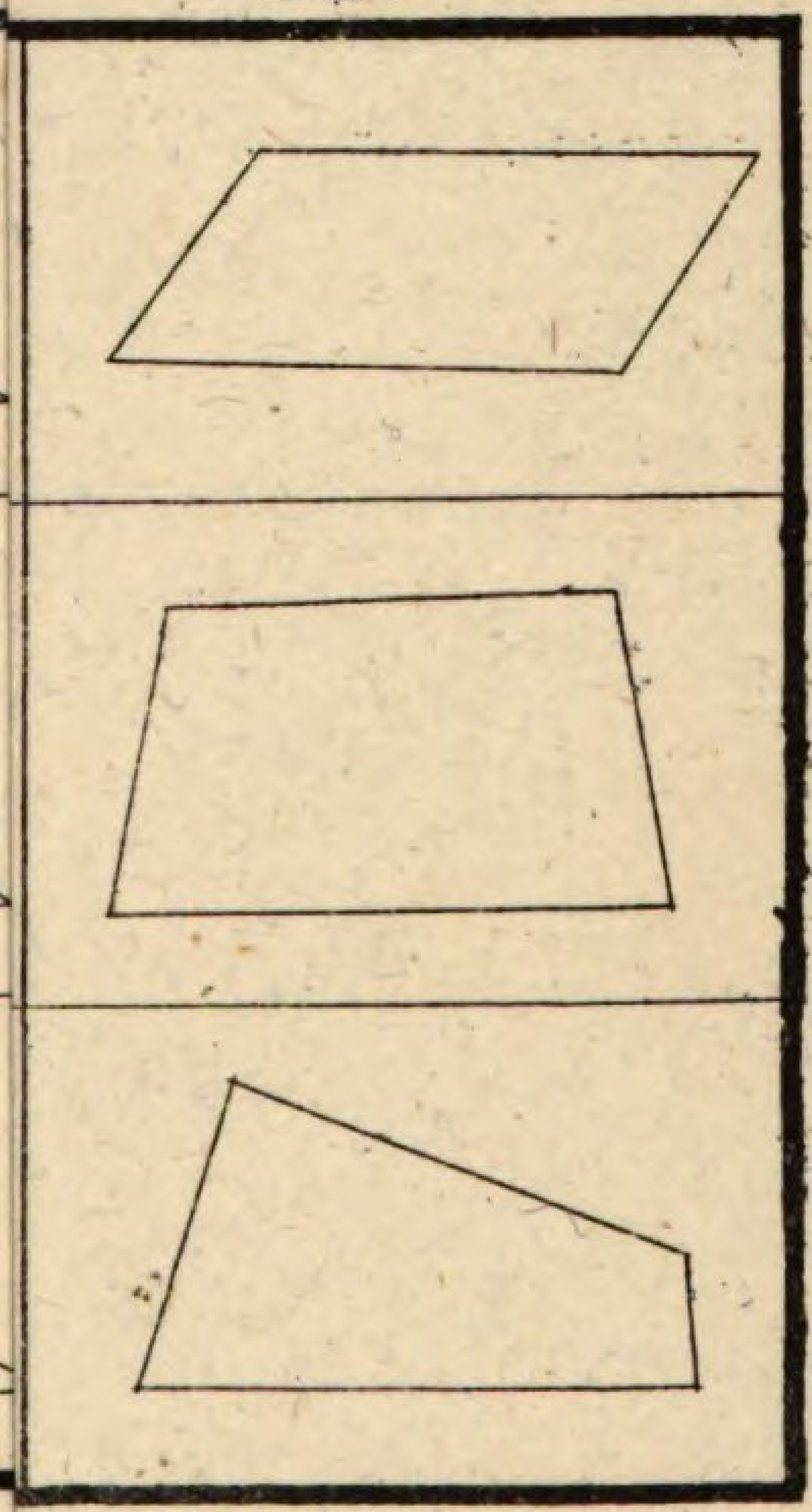
30



33.

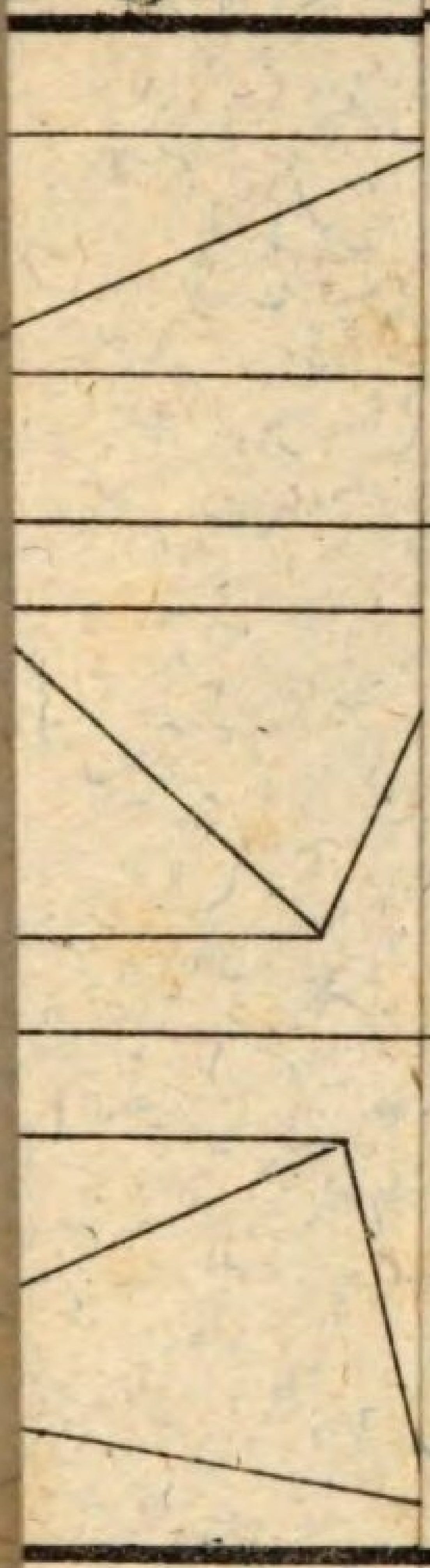


36.

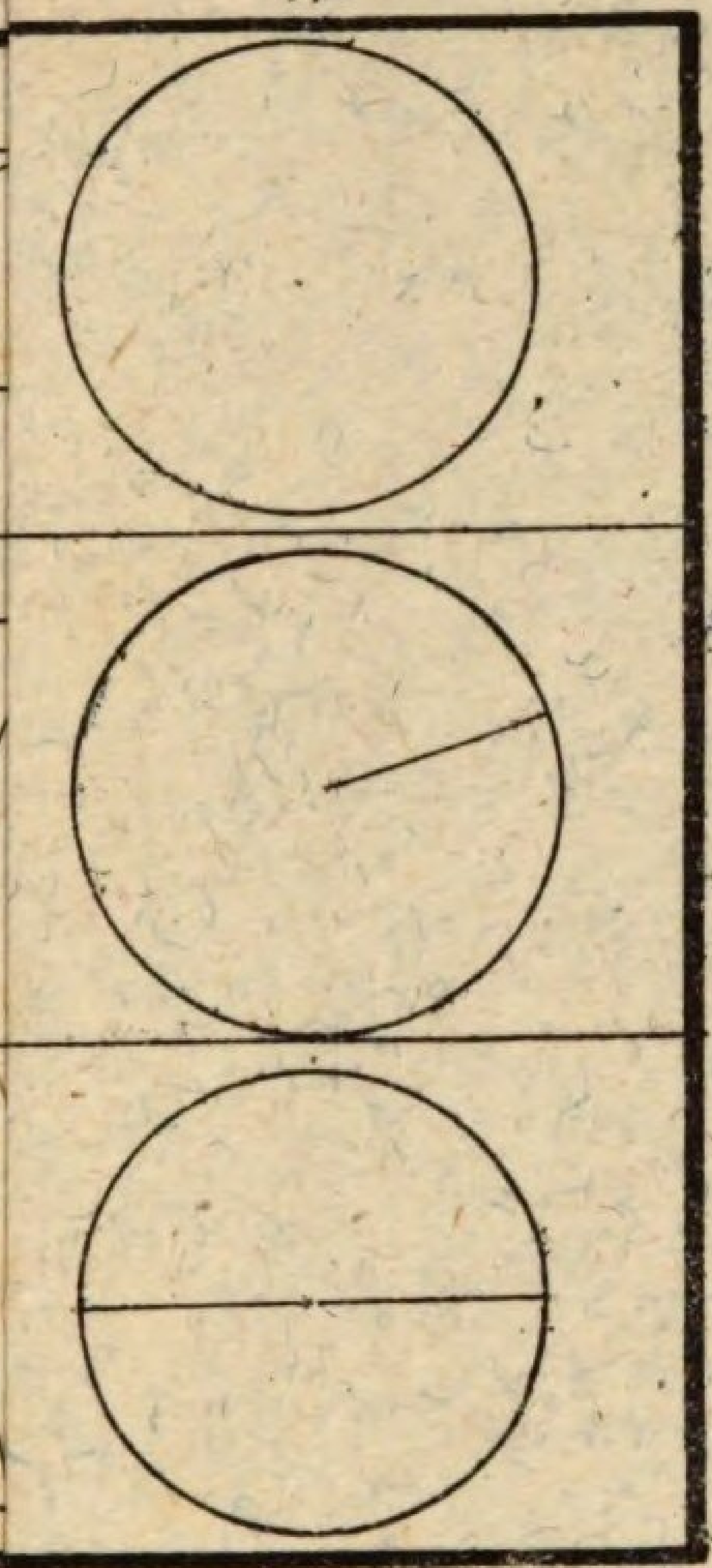


Tafel IV

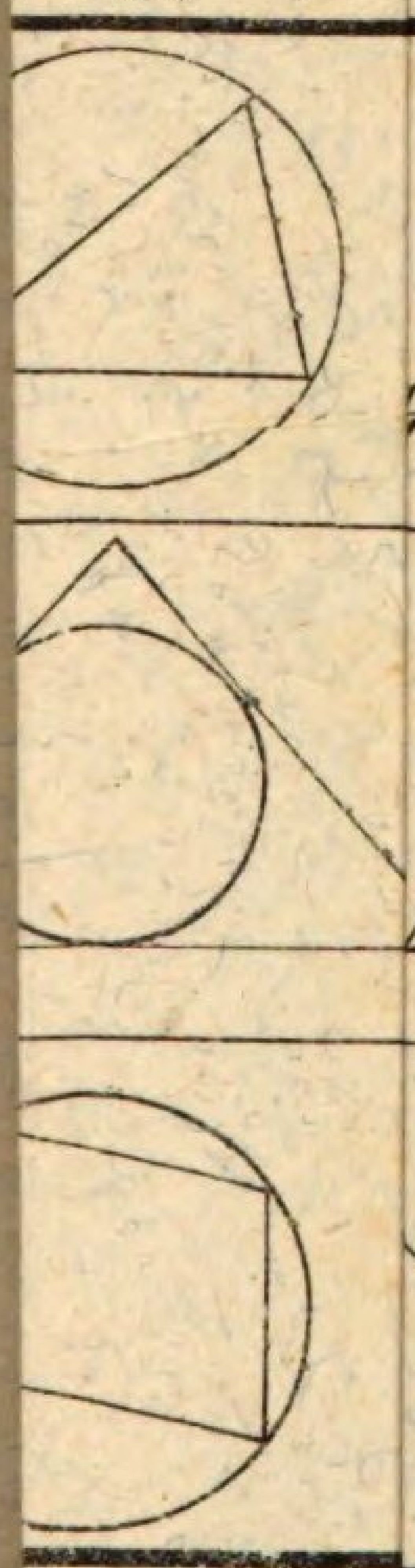
39.



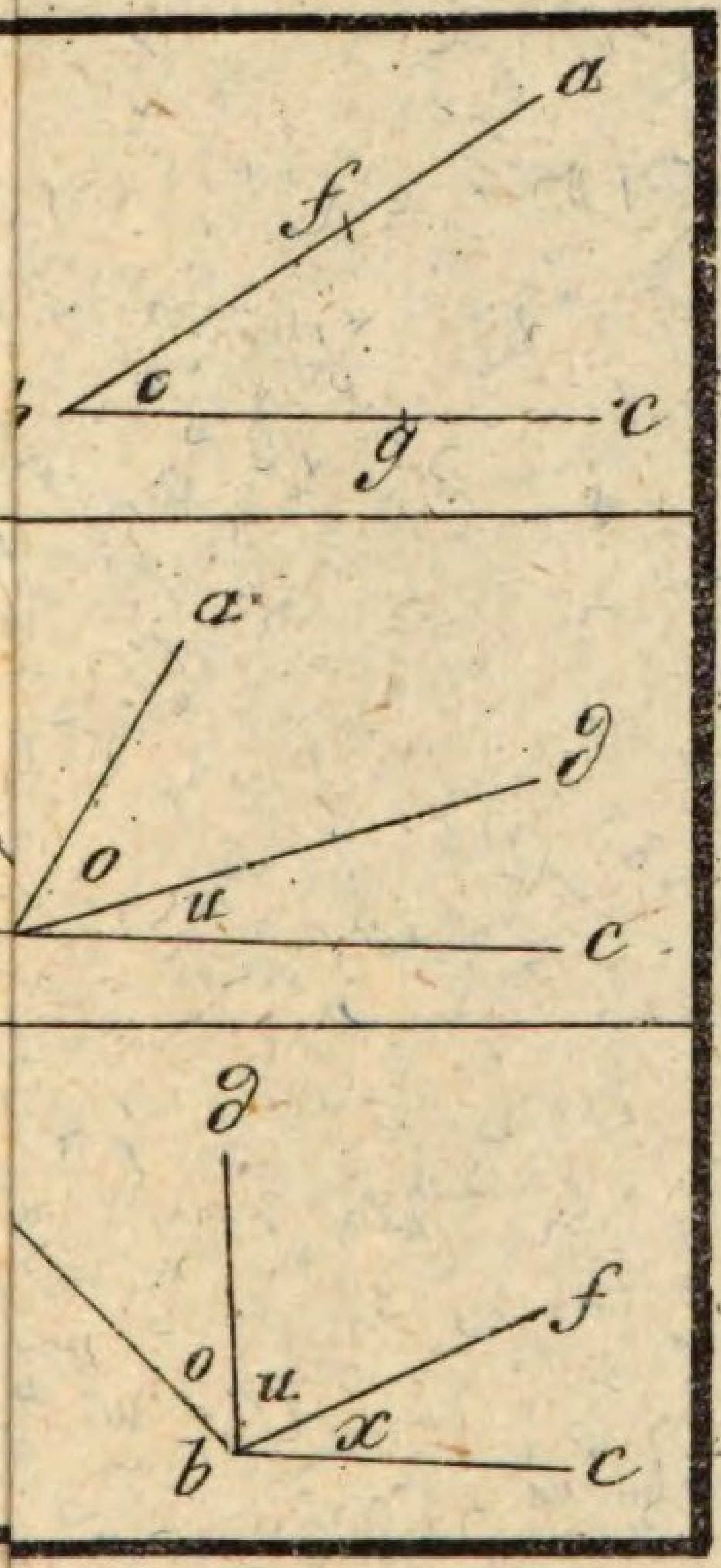
42



45.

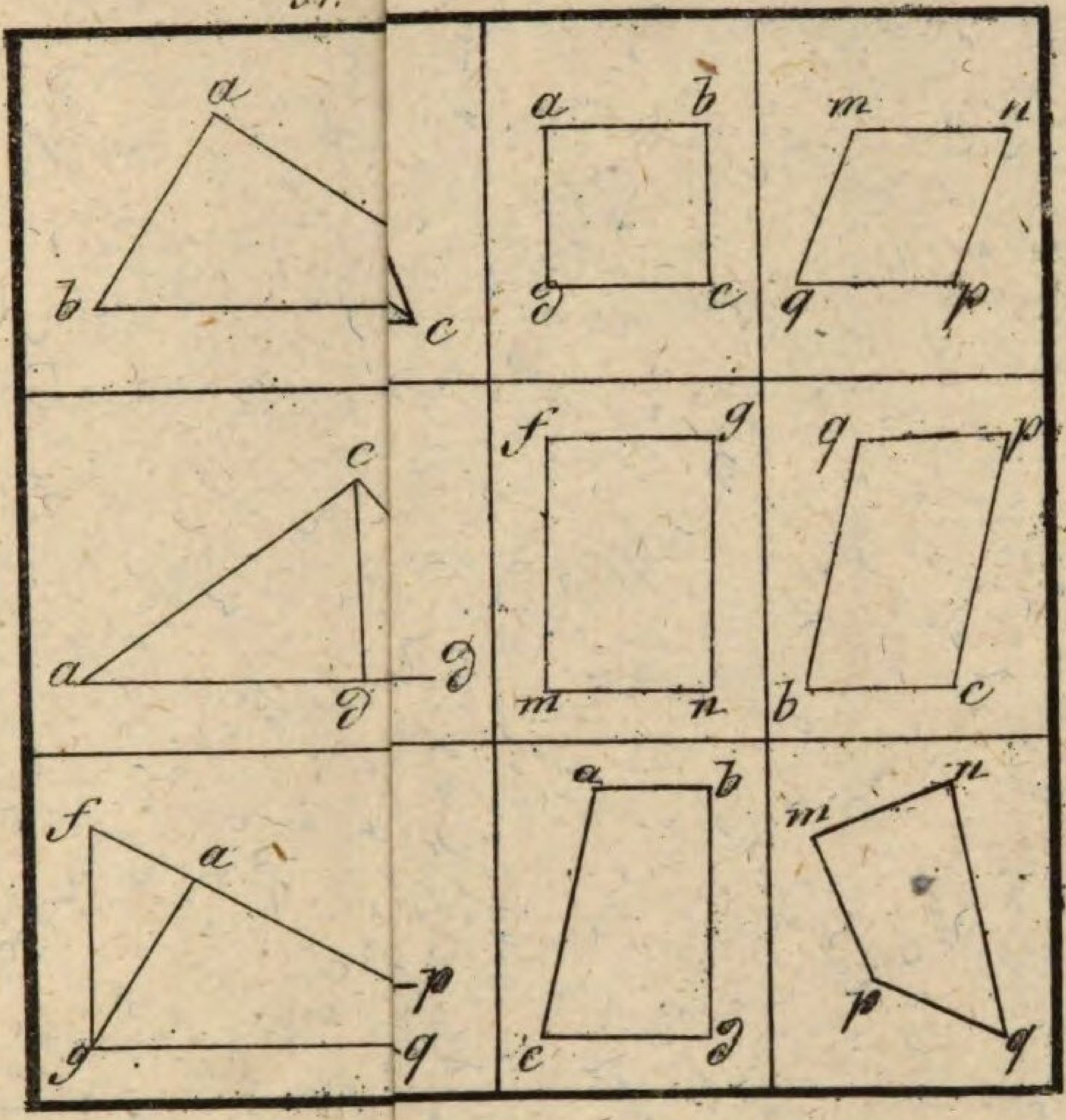


48.

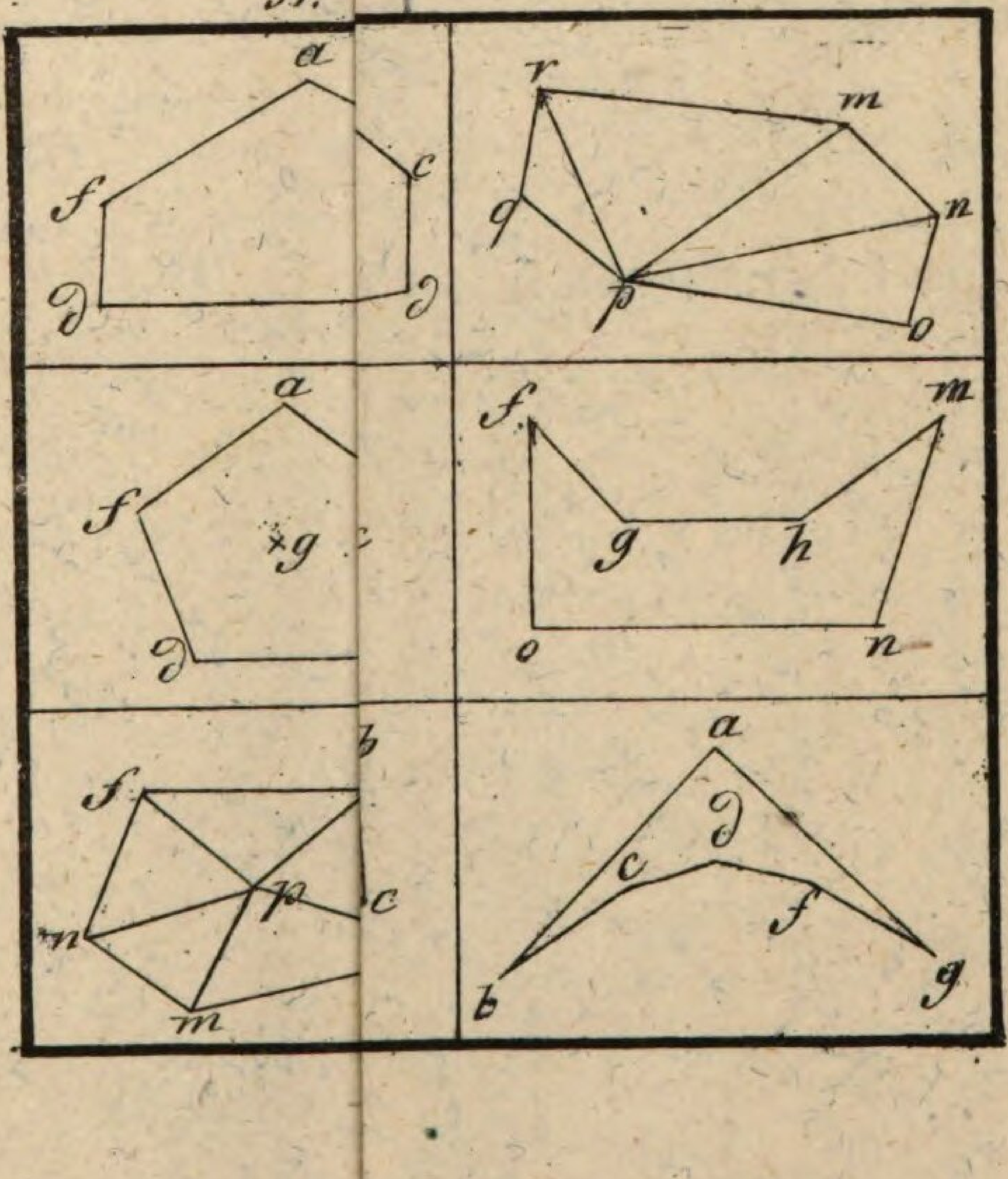


Tafel V.

51. 54.

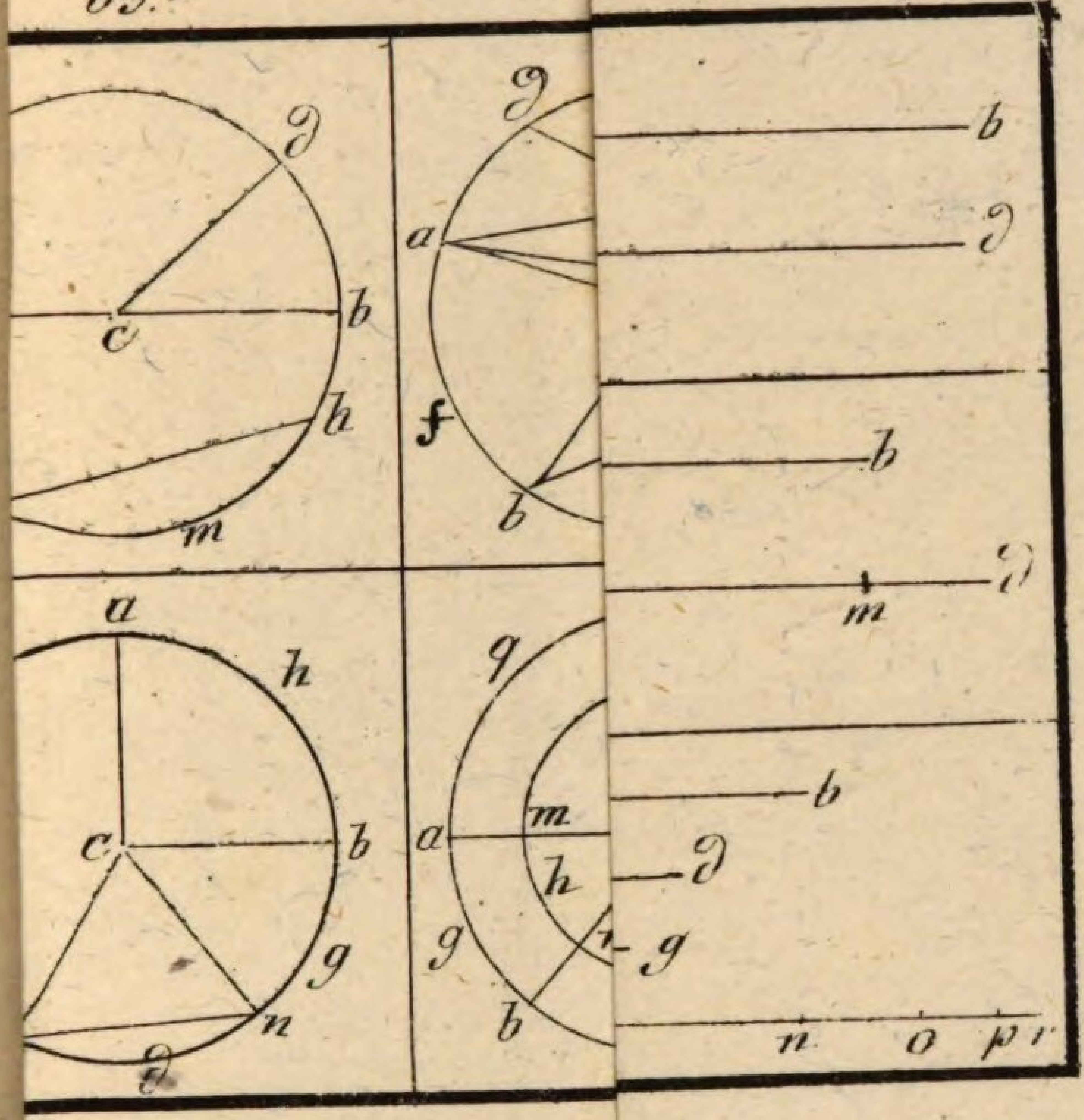


57. 60.

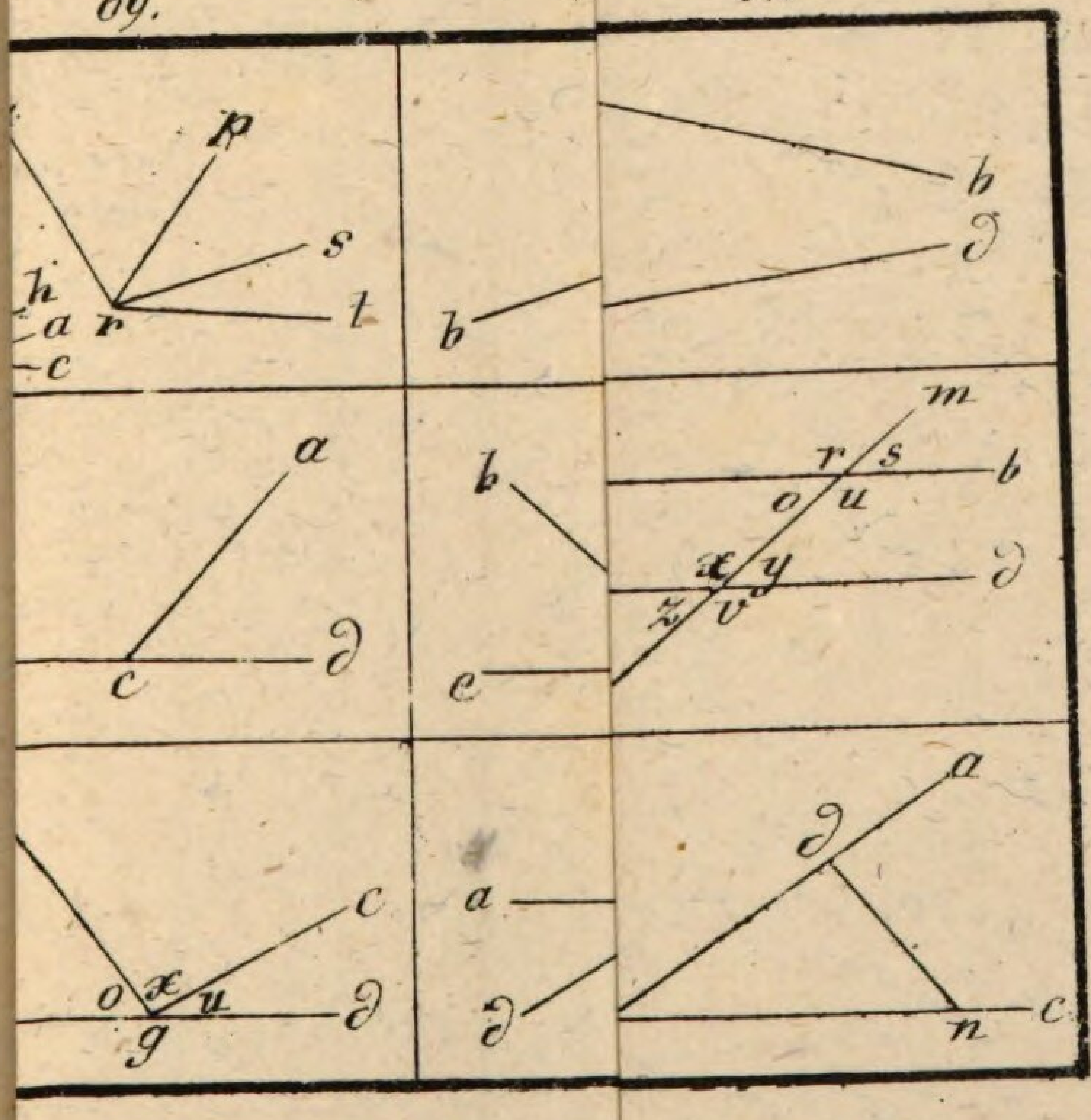


Tafel VI

63. 66.

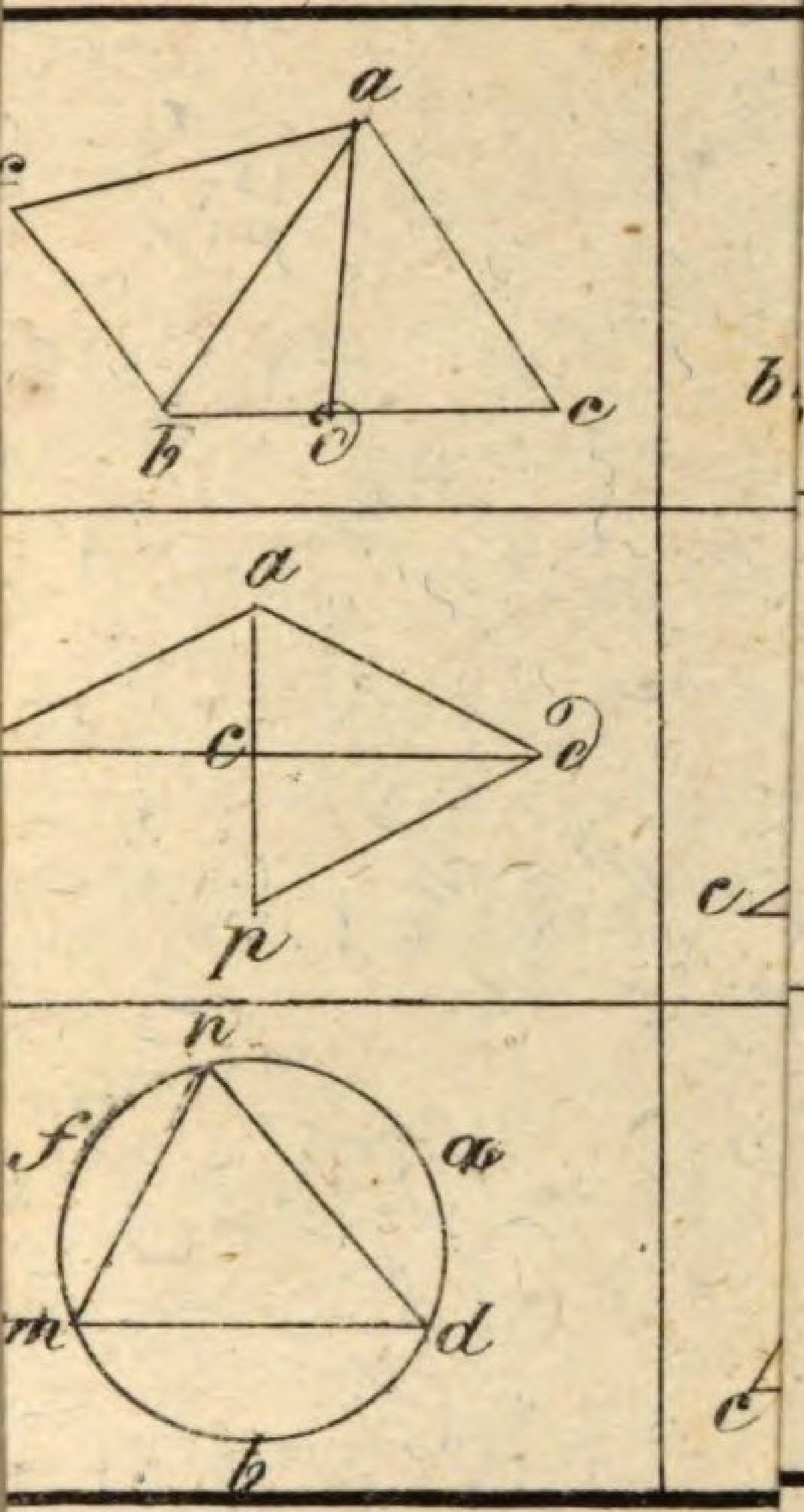


69. 72

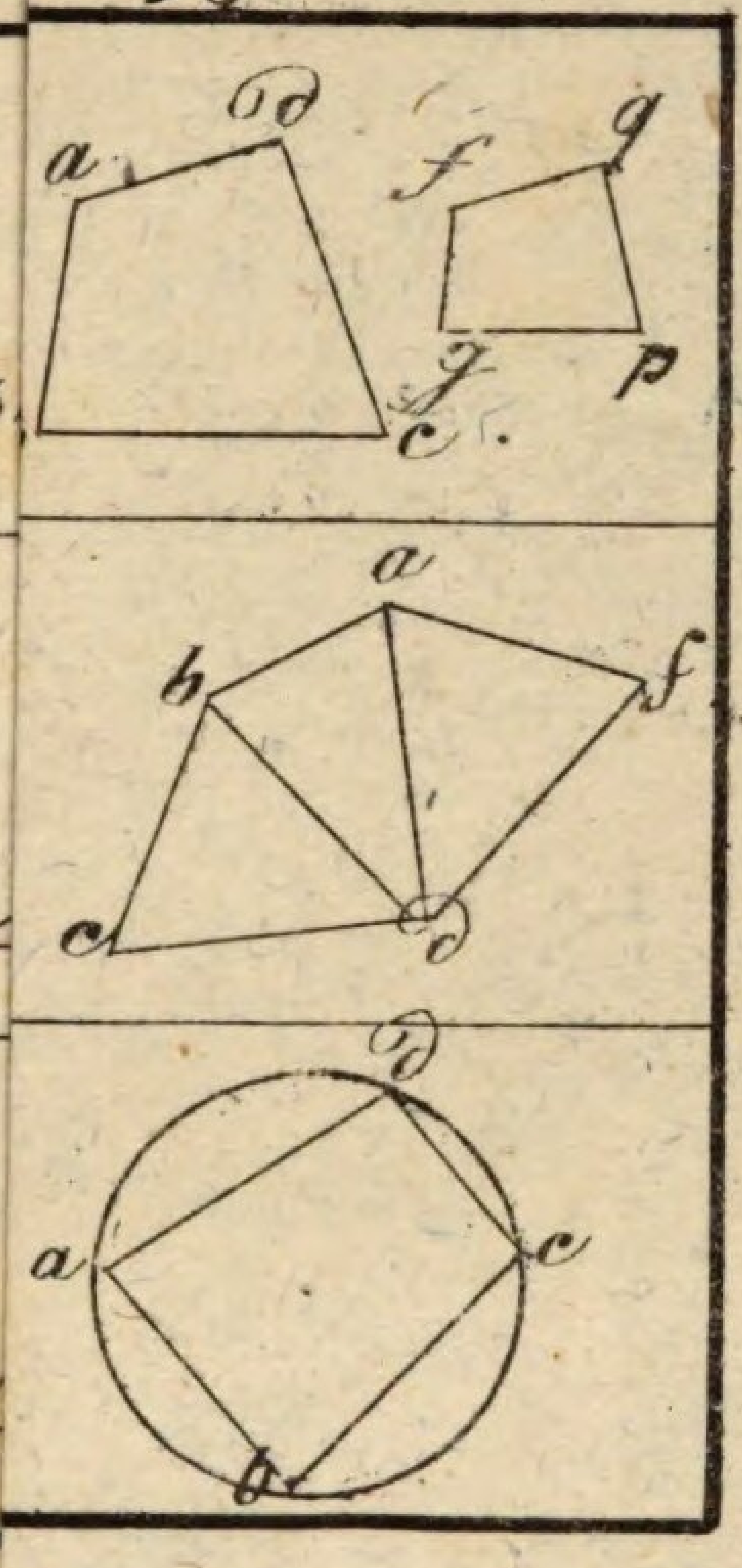


Tafel VII.

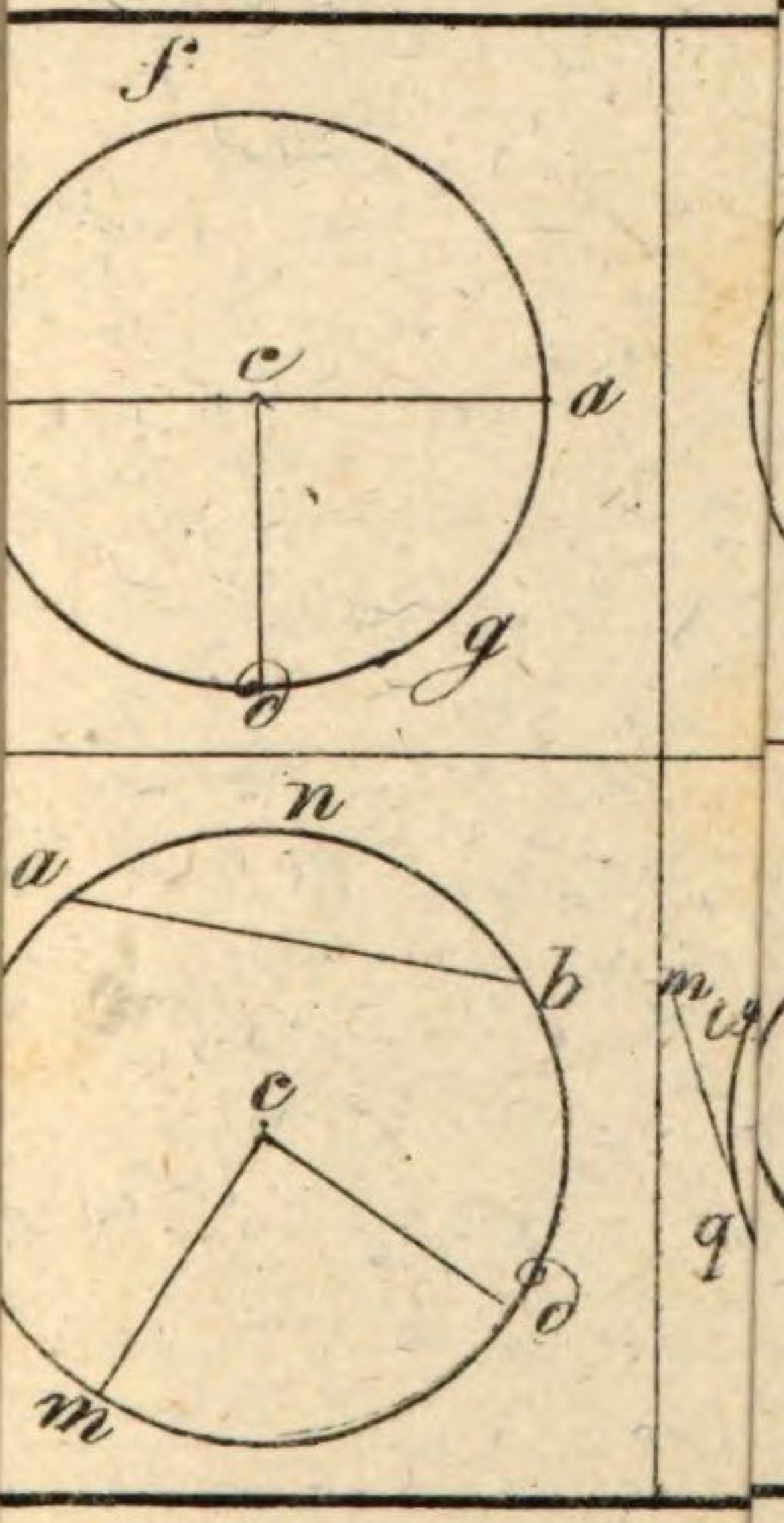
75.



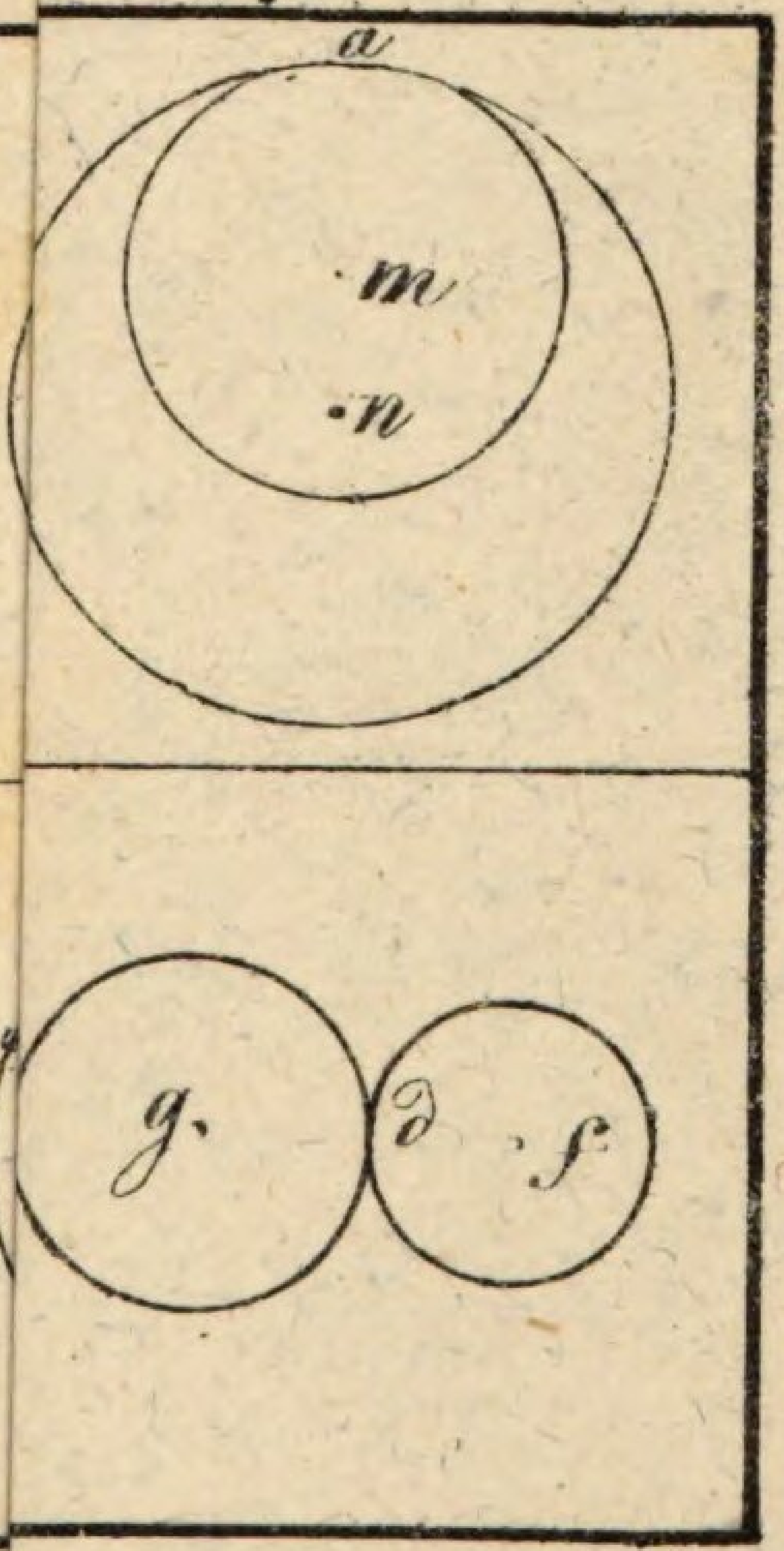
78.



81.



84.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Geometrische Anschauungslehre eine Vorbereitung zum leichten und grü
ndlichen Studium der Geometrie ; mit 7 Steintafeln

Mainz 1823

Math.p. 224 k
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082050-5